فصل ۲

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

الگوریتم تقسیم و بخش‌پذیری و باقی‌ماندگی

۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم حداقل عددی که لازم است به مقسوم اضافه شود تا مقسوم بر مقسوم‌علیه بخش‌پذیر شود برابر با اختلاف مقسوم‌علیه و باقی‌مانده است.

پس در این سؤال کافی است مقدار $۶ = ۱۷ - ۲۳$ را به مقسوم، یعنی عدد موردنظر اضافه کنیم.

۲- گزینهٔ ۱ فرض کنید مقسوم برابر با a، مقسوم‌علیه b، خارج‌قسمت q و باقی‌مانده r باشد، پس: $a = ۳۳r \;,\; b = ۸r$

از طرفی طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow ۳۳r = (۸r)q + r$$
$$\Rightarrow ۳۳r = r(۸q + ۱)$$
$$\Rightarrow ۳۳ = ۸q + ۱ \Rightarrow ۸q = ۳۲ \Rightarrow q = ۴$$

۳- گزینهٔ ۱ فرض کنید خارج‌قسمت تقسیم n بر ۸ برابر با q باشد، پس:

$$n = ۸q + ۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵n = ۸(۵q) + ۱۵ = ۸(۵q) + ۸ + ۷ = ۸(۵q + ۱) + ۷$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم $۵n$ بر ۸ برابر با ۷ می‌شود.

۴- گزینهٔ ۲ فرض کنید خارج‌قسمت این تقسیم برابر با q باشد، پس طبق الگوریتم تقسیم می‌توان نوشت:

$$۱۰۰ = xq + ۲ \xrightarrow{+۹۸} ۱۹۸ = xq + ۲ + ۹۸$$
$$\Rightarrow ۱۹۸ = xq + ۱۰۰ \xrightarrow{۱۰۰ = xq + ۲} ۱۹۸ = xq + xq + ۲ \Rightarrow ۱۹۸ = ۲xq + ۲ = (۲q)x + ۲$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۹۸ بر x برابر با ۲ می‌شود.

۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید عدد مدنظر برابر با x باشد.

بعد از این که x را ۳ برابر و سپس ۳ واحد به آن اضافه کردیم بر ۱۸ بخش‌پذیر شده؛ پس طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$۱۸k = ۳x + ۳ \Rightarrow ۱۸k = ۳(x + ۱) \Rightarrow ۶k = x + ۱ \Rightarrow x = ۶k - ۱$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۶ برابر با ۵ است؛ پس این عدد می‌تواند یکی از اعداد $۵, ۱۱, ۱۷, ۲۳, ۳۵, ...$ باشد که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر یک از اعداد فوق بر ۱۲ یکی از اعداد ۵ و ۱۱ است.

۶- گزینهٔ ۳ می‌دانیم حاصل‌ضرب هر ۲ عدد متوالی همواره بر ۲ بخش‌پذیر است.

در همهٔ گزینه‌ها ساختار ۲ عدد متوالی ظاهر شده است؛ به جز گزینهٔ ۳ که در آن $k + ۱$ و $k + ۳$ دو عدد متوالی نیستند و امکان دارد بر ۲ بخش‌پذیر نباشند.

برای مثال اگر $k = ۲$ آن‌گاه: $(k + ۱)(k + ۳) = ۳ \times ۵ = ۱۵$

که ۱۵ بر ۲ بخش‌پذیر نیست.

۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید اولین عدد زوج به صورت $۲k$ باشد، پس دو عدد دیگر به شکل $۲k + ۲$ و $۲k + ۴$ هستند، حال اگر این ۳ عدد را با هم جمع کنیم، داریم:

$$۲k + ۲k + ۲ + ۲k + ۴ = ۶k + ۶ = ۶(k + ۱)$$

که مشخص است این عدد بر ۶ بخش‌پذیر است.

۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی بر ۲ بخش‌پذیر است، پس $\frac{n(n+۱)}{۲}$ طبیعی است.

از طرفی حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است، یعنی $\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$ طبیعی است.

هم‌چنین $n(n + ۵)$ حتماً زوج است زیرا:

- اگر n زوج باشد، $n(n + ۵)$ حتماً زوج است.
- اگر n فرد باشد، $n + ۵$ زوج می‌شود؛ پس $n(n + ۵)$ زوج است.

بنابراین $\frac{n(n+۵)}{۲}$ طبیعی است.

اما $\frac{n(n+۱۰)}{۲}$ امکان دارد طبیعی نباشد. به عنوان مثال:

$$n = ۳ \Rightarrow \frac{n(n+۱۰)}{۲} = \frac{۳ \times ۱۳}{۲} \Rightarrow \text{طبیعی نیست}$$

۹- گزینه۲ با توجه به این‌که a مضرب ۶ و b مضرب ۱۵ است، پس هم a و هم b بر ۳ بخش‌پذیرند. بنابراین باقی‌مانده نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۰- گزینه۴ می‌دانیم عددی بر ۶ بخش‌پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد، یعنی رقم یکان آن باید زوج و مجموع ارقام آن باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. با توجه به این ساختار اعدادی که این ویژگی را دارند عبارت‌اند از:

۳۵۴	۳۴۲	۵۴۶	۲۴۶
۵۳۴	۳۲۴	۵۶۴	۲۶۴
	۴۳۲	۴۵۶	۴۲۶
	۲۳۴	۶۵۴	۴۶۲
			۶۴۲
			۶۲۴

که تعداد آن‌ها ۱۶تا است.

۱۱- گزینه۴ اگر عددی بر چند عدد بخش‌پذیر باشد، مطمئناً بر ک.م.م آن‌ها حتماً بخش‌پذیر است.

از آن‌جا که A بر ۳، ۶ و ۱۰ بخش‌پذیر است، پس A حتماً بر ک.م.م آن‌ها یعنی:

$$[۳,۶,۱۰]=۳۰$$

بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

مثالی که گزینه‌های (۱) تا (۳) را رد می‌کند خود عدد ۳۰ است.

۱۲- گزینه۲ برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ یک عدد دلخواه بر ۶ کافی بود به این ترتیب عمل کنیم که مقدار «رقم یکان + ۴ برابر سایر رقم‌ها» را محاسبه کرده و باقی‌ماندهٔ عدد حاصل را بر ۶ به دست آوریم.

به این ترتیب:

$$\overbrace{۵۵۵\cdots۵}^{۱۳۸۶} \Rightarrow ۵+۴(\underbrace{۵+۵+\cdots+۵}_{۱۳۸۵})=۵+(۴\times۵\times۱۳۸۵)=۲۷۷۰۵$$

با تکرار این قاعده:

$$۲۷۷۰۵ \Rightarrow ۵+۴(۲+۷+۷+۰)=۵+(۴\times۱۶)=۶۹$$

که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۶۹ بر ۶ برابر با ۳ است.

۱۳- گزینه۳ عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر است که هم بر ۹ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. (زیرا $(۹,۱۱)=۱$)

در بین گزینه‌ها، عدد گزینهٔ (۳) بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر است، زیرا:

$۳۷۵۲۱ \Rightarrow ۳+۷+۵+۲+۱=۱۸ \Rightarrow$ مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر است.

پس این عدد بر ۹ بخش‌پذیر است.

$\overset{+}{۳}\ \overset{-}{۷}\ \overset{+}{۵}\ \overset{-}{۲}\ \overset{+}{۱} \Rightarrow (۳+۵+۱)-(۷+۲)=۰$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۱۴- گزینه۳ ساختار عدد داده‌شده به این شکل است که هر یک از اعداد ۱ تا ۱۳۹۲ پشت سر هم نوشته شده است. برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۹، کافی است باقی‌ماندهٔ مجموع ارقام آن را بر ۹ به دست آوریم.

$$\text{مجموع ارقام} = ۱+۲+۳+\cdots+۱۳۹۲=\frac{۱۳۹۲\times۱۳۹۳}{۲}=۶۹۶\times۱۳۹۳$$

از طرفی می‌دانیم اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر c برابر با $k_۱$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر c برابر با $k_۲$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ab بر c برابر با $k_۱k_۲$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم ۶۹۶ بر ۹ برابر با ۳ است: $(۶+۹+۶=۲۱)$

باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۳۹۳ بر ۹ برابر با ۷ است $(۱+۳+۹+۳=۱۶)$.

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۳۹۳×۶۹۶ بر ۹ با باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳×۷ بر ۹ برابر است، که این مقدار برابر ۳ است.

۱۵- گزینه۴ از آن‌جا که در ساختار !۳۵، $(۳۵!=۱\times۲\times۳\times\cdots\times۳۵)$ عدد ۹ ضرب شده، پس این عدد باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد؛ یعنی جمع ارقام آن نیز باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

$$\text{جمع ارقام } ۳۵! = ۱+۰+۳+\cdots+۳+۲+*=۱۳۶+*$$

از طرفی جمع ارقام ۱۳۶ برابر با ۱۰ است، پس * باید برابر با ۸ شود تا عدد حاصل بر ۹ بخش‌پذیر شود.

۱۶- گزینه۳ از آن‌جا که $C=۱۸$ بر ۹ بخش‌پذیر است، پس B نیز بر ۹ بخش‌پذیر است؛ زیرا مجموع ارقام B یعنی C بر ۹ بخش‌پذیر است. هم‌چنین چون B بر ۹ بخش‌پذیر است (با استدلال مشابه)، A نیز بر ۹ بخش‌پذیر است. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۹ برابر صفر است.

۱۷- گزینه۱ با توجه به این‌که ارقام این عدد متفاوت هستند پس رقم‌های آن ۰، ۱، ۲، ... و ۹ هستند، بنابراین مجموع ارقام این عدد برابر است با:
$$۰+۱+۲+\cdots+۹=\frac{۹\times۱۰}{۲}=۴۵$$
که باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴۵ بر ۹ برابر با صفر است.

۱۸- گزینه۱ می‌دانیم عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد، پس دو رقم سمت راست آن باید ۰۸ باشد.

با توجه به این‌که این عدد، کوچک‌ترین عددی است که می‌توان ساخت، بقیهٔ رقم‌ها به صورت زیر قرار می‌گیرند.
$$\begin{array}{cccccc} - & + & - & + & - & + \\ ۱ & ۱ & ۷ & ۹ & ۰ & ۸ \end{array}$$
برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ این عدد بر ۱۱ می‌توان نوشت:
$$(۱+۹+۸)-(۱+۷+۰)=۱۰$$
که باقی‌ماندهٔ عدد ۱۰ بر ۱۱ برابر با ۱۰ است.

۱۹- گزینه۲ فرض کنید اولین عدد برابر با x باشد؛ پس ساختار حاصل‌جمع چهار عدد متوالی به شکل زیر است:
$$x+(x+۱)+(x+۲)+(x+۳)=۴x+۶=۴x+۴+۲=۴(x+۱)+۲$$
یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۴ باید برابر ۲ باشد.

در بین گزینه‌ها تنها عددی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۴ برابر با ۲ می‌شود عدد ۲۰۰۲ است.

۲۰- گزینه۴ چون عدد $\overline{۱۳x۵y}$ بر ۳ بخش‌پذیر است پس مجموع ارقام آن باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد، اما:
$$\text{مجموع ارقام}=۱+۳+x+۵+y=۹+x+y$$
یعنی $x+y$ باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

از آن‌جا که x و y اعداد یک‌رقمی هستند، بیشترین مقداری که x و y می‌توانند داشته باشند $x=۹$ و $y=۹$ است. بنابراین بیشترین مقدار $x+y$ برابر با ۱۸ است.

۲۱- گزینه۲ از آن‌جا که $(۲,۹)=۱$ و $۱۸=۹\times۲$، پس می‌توان گفت عددی بر ۱۸ بخش‌پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

اما عدد چهاررقمی $abcd$ بر ۱۸ بخش‌پذیر است پس:

الف) d زوج است (بخش‌پذیری بر ۲)

ب) $a+b+c+d$ بر ۹ بخش‌پذیر است (بخش‌پذیری بر ۹)

در بین گزینه‌ها عدد گزینهٔ (۲) یعنی $\overline{a۸bc۹۱d}$ شرایط بخش‌پذیری بر ۱۸ را دارد؛ زیرا:

الف) d زوج است. (فرض مسئله)

ب) $$a+۸+b+c+۹+۱+d=۱۸+\underbrace{(a+b+c+d)}_{\text{بر ۹ بخش‌پذیر (فرض مسئله)}}$$
پس مجموع ارقام آن نیز بر ۹ بخش‌پذیر است.

۲۲- گزینه۲ عددی بر ۱۸ بخش‌پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۹ بخش‌پذیر باشد (زیرا $(۲,۹)=۱$) پس b باید زوج باشد (بخش‌پذیری بر ۲) و مجموع ارقام عدد $\overline{۱۲۸۷a۴۵b}$ باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد، یعنی:
$$۱+۲+۸+۷+a+۴+۵+b=۲۷+a+b$$
پس $a+b$ باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

از آن‌جا که b زوج است و می‌خواهیم اختلاف دو رقم a و b حداکثر مقدار باشد پس:
$$a=۲\ ,\ b=۷$$
یعنی اختلاف آن‌ها برابر با عدد ۵ است. (دقت کنید که a و b باید مخالف صفر باشند (طبق فرض مسئله))

۲۳- گزینه۳ ابتدا با توجه به بخش‌پذیری $\overline{۵b۹}$ بر ۹ که از حاصل‌جمع دو عدد داده‌شده به دست می‌آید، ساختار a و b را مشخص می‌کنیم.
$$\begin{array}{r} ۲a۳ \\ +\ ۳۲۶ \\ \hline ۵b۹ \end{array} \Rightarrow a+۲=b$$
از طرفی $\overline{۵b۹}$ بر ۹ بخش‌پذیر است، پس $۵+b+۹$ باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد، یعنی $b=۴$ (دقت شود که b یک عدد یک‌رقمی است).

پس:
$$\xrightarrow{a+۲=b} a+۲=۴ \Rightarrow a=۲$$
یعنی: $a+b=۶$.

۲۴- گزینه۳ از آن‌جا که $۹\times۴=۳۶$ و $(۴,۹)=۱$ پس می‌توان گفت عددی بر ۳۶ بخش‌پذیر است که بر ۴ و ۹ بخش‌پذیر باشد.

برای این منظور دو دسته جواب $(a=۶, b=۷)$ و $(a=۲, b=۲)$ به دست می‌آید.

۴۲- گزینه۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد ۷۰، ۵۰ و ۳۰ بر ۳ به ترتیب برابر با ۱، ۲ و صفر است. پس عدد a هر عددی که باشد حتماً یکی از پرانتزها بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. زیرا:

اگر a بر ۳ بخش‌پذیر باشد، $a+30$ بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود.

اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۳ برابر با یک باشد، $a+50$ بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود.

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۳ برابر با ۲ باشد، $a+70$ بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود.

۴۳- گزینه۲ ابتدا عدد ۲۲۵ را تجزیه می‌کنیم و سپس با توجه به ساختار ظاهرشده در تجزیه آن مسئله را حل می‌کنیم.

$۲۲۵ = ۹ \times ۲۵$

عدد مدنظر باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد، پس باید حداقل ۹تا یک داشته باشد.

از طرفی عدد باید بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد، با توجه به این‌که این عدد طبیعی فقط از ۰ و ۱ ساخته شده است، پس دو رقم سمت راست آن باید صفر باشد. یعنی عدد موردنظر به شکل مقابل است:

۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۰

که تعداد ارقام آن برابر با ۱۱ است.

۴۴- گزینه۵ با توجه به باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۲۰۰۱ بر ۹۹۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۰۰۱ بر n را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲۰۰۱ & ۹۹۹ \\ \hline & ۲ \\ ۳ & \end{array}$$

از آن‌جا که:

پس: $۲۰۰۱ = (۲\times ۹۹۹) + ۳$

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ ۲۰۰۱ بر n کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲×۹۹۹ بر n را به اضافهٔ عدد ۳ کنیم. از طرفی با توجه به صورت سؤال باقی‌ماندهٔ تقسیم ۹۹۹ بر n برابر با ۳ پس باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲×۹۹۹ بر n برابر با $۶ = ۳ \times ۲$ است. بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲۰۰۱ = (۲\times ۹۹۹) + ۳$ بر n برابر با $۹ = ۳ + ۶$ است.

۴۵- گزینه۵ در مورد عدد $۲۰۰۱^{۲۰۰۱}$ توجه داشته باشید که پایهٔ عدد یعنی ۲۰۰۱، بر ۳ بخش‌پذیر است پس $۲۰۰۱^{۲۰۰۱}$ حتماً بر ۹، بخش‌پذیر است (زیرا اگر عدد ۳ به توانی بزرگ‌تر از یک برسد بر ۹ بخش‌پذیر می‌شود پس، هر عدد بخش‌پذیر بر ۳ این خاصیت را دارد).

از آن‌جا که این عدد بر ۹ بخش‌پذیر است، اگر مجموع ارقام آن را مرتباً حساب کنیم، باید بر ۹ بخش‌پذیر شود و در مرحلهٔ آخر برای بخش‌پذیری بر ۹ به رقم ۹ می‌رسیم.

۴۶- گزینه۲ اعدادی که بیرون می‌آوریم یا باید بر ۴ بخش‌پذیر باشند یا دو عدد زوج بیرون آوریم. پس در بدترین حالت حداقل باید ۵۰ عدد فرد را کنار بگذاریم. از طرفی برای بخش‌پذیر بودن بر ۴ باید ۲ عدد زوج نیز بیرون آورده شود.

بنابراین برای این‌که بتوانیم مطمئن شویم که حاصل‌ضرب حداقل ۲ کارت از کارت‌های بیرون آورده شده بر ۴ بخش‌پذیر است؛ باید ۵۲ کارت بیرون آوریم.

۴۷- گزینه۴ از آن‌جا که در هر مرحله عدد دومی که نوشته می‌شود، باقی‌ماندهٔ مجموع اعداد پاک‌شده بر ۹ است، پس مطمئناً عدد دوم کم‌تر از ۹ است.

هم‌چنین جمع ارقام ۱ تا ۱۳۷۶ برابر است با:

$$۱+۲+۳+\cdots+۱۳۷۶ = \frac{۱۳۷۶\times ۱۳۷۷}{۲} = ۶۸۸\times ۱۳۷۷$$

که ۱۳۷۷ بر ۹ بخش‌پذیر است $(۱۸ = ۷+۷+۳+۱)$، پس این مجموع باید بر ۹ بخش‌پذیر شود، یعنی مجموع عدد ۷۶ با عدد دوم که مقداری کم‌تر از ۹ دارد باید بر ۹ بخش‌پذیر شود. تنها عددی که این خاصیت را دارد عدد ۵ است.

۴۸- گزینه۳ با توجه به این‌که $۱۱\times ۹ = ۹۹$ و $(۹,۱۱) = ۱$ پس این عدد باید بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

برای بخش‌پذیری بر ۹ باید مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد، ولی چون این اعداد فقط از رقم یک تشکیل شده‌اند پس تعداد یک‌ها باید مضرب ۹ باشد.

از طرفی اعدادی با این ساختار در صورتی که تعداد یک‌ها زوج باشد بر ۱۱ بخش‌پذیر می‌شوند، پس برای رسیدن به خواستهٔ مسئله تعداد یک‌ها باید مضرب ۹ و مضرب ۲ یعنی مضرب ۱۸ باشد، بنابراین:

$$\begin{array}{r|l} ۱۳۹۳ & ۱۸ \\ \hline & ۷۷ \end{array}$$

تعداد اعدادی که بر ۹۹ بخش‌پذیر است برابر با ۷۷تا است.

۴۹- گزینه۳ هیچ‌یک از اعداد ۱، ۱۱، ۱۱۱، ۱۱۱۱، ۱۱۱۱۱و ۱۱۱۱۱ بر ۷ بخش‌پذیر نیستند و اولین عددی که بر ۷ بخش‌پذیر است، عدد ۱۱۱۱۱۱ است.

پس می‌توان گفت با این ساختار، اعدادی بر ۷ بخش‌پذیر می‌شوند که تعداد رقم‌های یک آن بر ۶ بخش‌پذیر باشند، یعنی هر ۶ عدد یک بار بر ۷ بخش‌پذیر می‌شوند.

$$\begin{array}{r|l} ۱۳۸۷ & ۶ \\ \hline \vdots & ۲۳۱ \\ ۱ & \end{array}$$

با توجه به این‌که تعداد اعداد ۱۳۸۷تا است، پس تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۷ برابر با ۲۳۱ است.

۵۰- گزینه۴ با توجه به قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۴۵ گزینهٔ درست را انتخاب می‌کنیم.

از آن‌جا که ۴۵ = ۹ × ۵ و ۱ = (۹,۵) پس برای این‌که عددی بر ۴۵ بخش‌پذیر باشد باید بر ۵ و ۹ بخش‌پذیر باشد.

عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد، پس گزینهٔ (۲) رد می‌شود.

از طرفی عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن ۹ باشد که همهٔ گزینه‌ها این خاصیت را دارند.

اما شرط دوم مسئله این است که مجموع ارقام آن نیز بر ۴۵ بخش‌پذیر باشد که گزینهٔ (۱) این خاصیت را ندارد. (زیرا ۴ + ۵ = ۹ است و ۹ بر ۵ بخش‌پذیر نیست.)

در بین ۳ گزینهٔ دیگر کوچک‌ترین مقدار، عدد گزینهٔ (۴) است.

۵۱- گزینه۴ فرض کنید عدد مدنظر به شکل $\overline{abc}$ باشد.

از آن‌جا که عدد، زوج است پس c باید زوج باشد. بنابراین برای c، ۵ حالت وجود دارد.

از طرفی طبق فرض، جمع ارقام عدد زوج است؛ یعنی $a+b$ باید زوج باشد، که یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

(رقم صدگان نمی‌تواند صفر باشد.)

حالت اول: هر دو زوج: $b,a \Rightarrow$ تعداد حالات = ۵ × ۴ = ۲۰

حالت دوم: هر دو فرد: $b,a \Rightarrow$ تعداد حالات = ۵ × ۵ = ۲۵

پس برای $a+b$، ۴۵ حالت وجود دارد، لذا کل حالات برابر است با: ۲۲۵ = ۴۵ × ۵

۵۲- گزینه۱ با ردکردن وجود هر یک از ارقام صفر تا ۹ در ساختار این عدد ثابت می‌کنیم چنین عددی وجود ندارد.

رقم صفر در ساختار این عدد نباید وجود داشته باشد، زیرا بخش‌پذیری بر صفر بی‌معنی است.

رقم ۵ هم در ساختار این عدد وجود ندارد زیرا:

برای بخش‌پذیری بر ۵ رقم یکان آن یا باید ۵ باشد یا صفر. رقم یکان، نمی‌تواند صفر باشد (چون صفر در ساختار این عدد وجود ندارد)، رقم یکان، ۵ هم نمی‌تواند باشد، زیرا در این صورت این عدد دیگر نمی‌تواند بر اعداد زوج ۲، ۴، ۶ و ۸ بخش‌پذیر شود.

ارقام باقی‌مانده عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸ و ۹. جمع آن‌ها برابر با ۴۰ است که بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

پس رقم ۹ هم نباید در ساختار این عدد وجود داشته باشد.

ارقام باقی‌مانده ۷تا است که مدنظر سؤال عدد ۸رقمی است. پس چنین عددی وجود ندارد.

۵۳- گزینه۱ با توجه به این‌که هر عدد دورقمی که در ساختار این عدد وجود دارد بر ۱۷ بخش‌پذیر است پس این عدد دورقمی باید یکی از اعداد ۱۷، ۳۴، ۵۱، ۶۸ یا ۸۵ باشد.

از طرفی هر عدد دورقمی باید بر ۲۳ نیز بخش‌پذیر باشد، یعنی باید یکی از اعداد ۲۳، ۴۶، ۶۹ یا ۹۲ باشد.

از آن‌جا که عدد موردنظر با ۶ شروع می‌شود این عدد باید به شکل زیر باشد. (بعد از ۶ باید ۹ باشد که بر ۲۳ بخش‌پذیر شود. اگر بعد از رقم ۶، رقم ۸ بیاید، بعد از ۸ هیچ رقمی شرایط ظاهرشدن را ندارد.) ...۶۹۲۳۴۶۹۲۳۴

پس در ساختار این عدد، عدد ۶۹۲۳۴ که یک ۵رقمی است مرتباً تکرار می‌شود. از آن‌جا که باقی‌ماندهٔ ۲۰۰۶ بر ۵ برابر با یک می‌شود پس شکل کامل عدد به صورت زیر است: ۶۹۲۳۴۶۹۲۳۴...۶۹۲۳۴۶

که مجموع ۵ رقم آخر برابر است با: ۲۴ = ۶ + ۴ + ۳ + ۲ + ۹

اعداد اول

۵۴- گزینه۲ اعداد اول موجود در این مجموعه عبارت‌اند از: ۱۲۷ و $\sqrt{۲۵}+۲=۷$ (عدد ۱۰۰۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.)

۵۵- گزینه۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $۳۷^{۱۳}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

گزینهٔ (۲): $\underbrace{۱}_{\text{فرد}}+\underbrace{۵^{۱۳}}_{\text{فرد}}+\underbrace{۲^{۱۱}}_{\text{زوج}}$ که (فرد + فرد + زوج = زوج) حاصل عبارت، عددی زوج است، پس بر ۲ بخش‌پذیر است.

گزینهٔ (۳): ۱۹×۱۷×۱۳ به هر یک از اعداد ۱۳، ۱۷ و ۱۹ بخش‌پذیر است.

گزینهٔ (۴): عدد ۱۹۹ اول است زیرا بر هیچ‌یک از اعداد اول کم‌تر از $۱۴ \sim \sqrt{۱۹۹}$ بخش‌پذیر نیست.

۵۶- گزینهٔ ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): ۱۴۰۹ بر هیچ عددی به‌جز خودش و یک بخش‌پذیر نیست؛ پس اول است.

گزینهٔ (۲): ۱۱۲۱۱ بر ۳ بخش‌پذیر است. (۶ = ۱ + ۱ + ۲ + ۱ + ۱)

گزینهٔ (۳): با توجه به عبارت $\underbrace{1}_{\text{فرد}} + \underbrace{125^{59}}_{\text{فرد}} + \underbrace{26^{198}}_{\text{زوج}}$، حاصل عبارت، زوج است پس بر ۲ بخش‌پذیر است.

گزینهٔ (۴): با توجه به این‌که اعداد $1, 5^1, 5^2, \ldots, 5^{99}$ فرد هستند، پس مجموع این ۱۰۰ عدد، عددی زوج است، علاوه بر آن 4^{52} نیز عددی زوج است، پس حاصل عبارت، مقداری زوج است که بر ۲ بخش‌پذیر است.

۵۷- گزینهٔ ۲ تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰، ۹۹۹تا است که عدد یک نه اول است نه مرکب. پس اگر تعداد اعداد اول کم‌تر از ۱۰۰۰، n تا باشد تعداد اعداد مرکب کم‌تر از ۱۰۰۰ برابر است با:

$998 - n$

۵۸- گزینهٔ ۵ تنها عددی که این خاصیت را دارد عدد ۲۰ است. پس هیچ‌کدام از گزینه‌های (۱) تا (۴) درست نیستند.

۵۹- گزینهٔ ۳ این اعداد عبارت‌اند از:

۱۰۱,۱۱,۲

۶۰- گزینهٔ ۳ تنها عدد اول زوج، ۲ است، پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۶۱- گزینهٔ ۳ هر چه در اعداد طبیعی جلوتر برویم تعداد اعداد اول در یک محدودهٔ مشخص کم‌تر می‌شود. (زیرا احتمال بخش‌پذیری آن بر اعداد اول قبل از آن بیشتر است.)

در دنبالهٔ متوالی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ بیشترین تعداد اول، یعنی ۵ عدد اول وجود دارد.

۶۲- گزینهٔ ۲ اعدادی که این خاصیت را دارند، عبارت‌اند از:

(۳,۱۳),(۷,۲۹),(۱۳,۵۳)

۶۳- گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که یکی از اعداد اول بین ۳ تا ۱۰۰، عدد ۵ است. پس در این حاصل‌ضرب عدد ۵ وجود دارد، پس رقم یکان عدد حاصل برابر با ۵ است.

۶۴- گزینهٔ ۱ اعداد اولی که دارای این خاصیت هستند عبارت‌اند از:

۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۷,۴۷,۵۹

۶۵- گزینهٔ ۴ با در نظر گرفتن اعداد اول دورقمی و بررسی آن‌ها، اعدادی که این خاصیت را دارند عبارت‌اند از: ۱۱,۱۳,۱۷,۳۱,۳۷,۷۱,۷۳,۷۹,۹۷

که تعداد آن‌ها ۹تا است.

۶۶- گزینهٔ ۴ با توجه به این‌که مجموع این ۹ عدد اول برابر با ۱۰۰ است، پس مطمئناً همهٔ آن‌ها کم‌تر از ۱۰۰ هستند. با شروع از کوچک‌ترین عدد اول داریم:

$2+3+5+7+11+13+17+19+23 = 100$

بنابراین در حاصل‌ضرب آن‌ها عدد ۳۱ وجود ندارد پس این حاصل‌ضرب نمی‌تواند بر ۳۱ بخش‌پذیر باشد.

۶۷- گزینهٔ ۲ هر سه ادعا را بررسی می‌کنیم.

ادعای اول واضح است که درست است.

ادعای دوم درست نیست، زیرا هیچ عدد چهاررقمی وجود ندارد که مجموع ارقام آن برابر با ۲ و اول باشد. (۱۱۰۰ و ۱۰۱۰ بر ۲، ۱۰۰۱ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است.)

ادعای سوم نیز درست نیست، به عنوان مثال مجموع ارقامِ عدد ۱۳، مقداری زوج است، ولی اول است.

۶۸- گزینهٔ ۳ فرض کنید این سه عدد اول به ترتیب a، b و c باشند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی abc همواره بر اعداد مرکب ab، ac، bc و abc بخش‌پذیر است.

۶۹- گزینهٔ ۵ از آن‌جا که ۲۰۰۳ عددی فرد است تنها حالتی که امکان دارد این عدد را به صورت مجموع دو عدد اول نشان داد این حالت است که یکی از آن‌ها عدد ۲ باشد. اگر چنین باشد، عددی دیگر باید ۲۰۰۱ باشد که ۲۰۰۱ اول نیست. (بر ۳ بخش‌پذیر است.)

پس چنین نمایشی برای ۲۰۰۳ امکان‌پذیر نیست.

۷۰- گزینهٔ ۲ اگر p عددی فرد باشد، p^4 نیز عددی فرد است و p^4+1 مقداری زوج است که بر ۲ بخش‌پذیر است، یعنی p^4+1 مرکب است. بنابراین p نمی‌تواند عددی فرد باشد؛ پس p فقط می‌تواند ۲ باشد که در این حالت $p^4+1=17$ که عددی اول است.

۷۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد متوالی همواره بر ۲ بخش‌پذیر است. پس تنها حالتی که $n(n+1)$ می‌تواند اول باشد، حالتی است که $n=1$ باشد که در این حالت حاصل $n(n+1)$ برابر با ۲ می‌شود.

۷۲- گزینه۱ می‌دانیم حاصل‌ضرب ۲ عدد در حالتی فرد می‌شود که هر دوی آن‌ها فرد باشند یعنی c و $a-b$ فرد است.
از طرفی از آن‌جا که a و b اول هستند و $a-b$ فرد است حتماً $b=۲$ است.

۷۳- گزینه۲ فرض کنید این دو عدد اول به ترتیب a و b باشند. با توجه به این‌که سه برابر مجموع آن‌ها برابر با ۲۱۹ است، پس:

$$۳(a+b)=۲۱۹ \Rightarrow a+b=۷۳$$

مجموع دو عدد اول برابر با عددی فرد است، پس یکی از آن‌ها برابر با ۲ است. $a=۲ \Rightarrow b=۷۱$

بنابراین اختلاف آن‌ها برابر با $۶۹=۲-۷۱$ می‌شود که بر ۳ بخش‌پذیر است.

۷۴- گزینه۲ از آن‌جا که $a+b+c=۷۱$ است، یعنی جمع ۳ عدد اول برابر با عددی اول است، پس هیچ‌کدام از اعداد a، b یا c نمی‌تواند برابر با ۲ باشد (زیرا در این صورت $a+b+c$ زوج می‌شود).
مشخص است که b نمی‌تواند ۶۱ یا ۶۷ باشد (زیرا $c>b$ و در این صورت جمع آن‌ها بیشتر از ۷۱ می‌شود).
با بررسی حالت‌های مختلف $c=۳۷$، $b=۳۱$ و $a=۳$.

۷۵- گزینه۲ فرض کنید این دو عدد اول a و b باشند، پس: $a^۲+b^۲=۱۷۳$

جمع دو عدد برابر با مقداری فرد شده است پس یکی از آن‌ها زوج و یکی از آن‌ها فرد است.
فرض کنید $a^۲$ زوج و $b^۲$ فرد باشد، پس a زوج و b فرد است.
از طرفی تنها عدد اول زوج برابر با ۲ است، یعنی $a=۲$، بنابراین: $۲^۲+b^۲=۱۷۳ \Rightarrow b^۲=۱۶۹ \Rightarrow b=۱۳$

پس: مجذور مجموع دو عدد $=(۲+۱۳)^۲=۱۵^۲=۲۲۵$

۷۶- گزینه۴ با توجه به این‌که: $p^۲-۲q^۲=۱ \Rightarrow p^۲=۲q^۲+۱$

با حدس و آزمایش داریم: (p مطمئناً فرد است.) $q=۲ \Rightarrow p^۲=۲\times۴+۱=۹ \Rightarrow p=۳$

پس: $p^۲+q=۹+۲=۱۱$

باقی‌ماندهٔ ۱۱ بر ۵ برابر با یک است.

۷۷- گزینه۱ a^b تنها در حالتی می‌تواند اول باشد که (در بقیهٔ حالت‌ها حتماً بر a بخش‌پذیر است) a عددی اول و $b=۱$ است.
پس: $b^a=۱^a=۱$

۷۸- گزینه۴ با توجه به این‌که با حذف اولین و آخرین رقم آن، حاصل باید عدد اول خاص باشد، در مورد اعداد اول خاص دورقمی می‌توان گفت حتماً از ترکیب اعداد اول یک‌رقمی ساخته شده‌اند و در مورد اعداد اول سه‌رقمی خاص هم می‌توان نتیجه گرفت حتماً از ترکیب اعداد اول دورقمی خاص ساخته شده‌اند.
با این توضیحات این اعداد عبارت‌اند از: $۲,۳,۵,۷,۲۳,۳۷,۵۳,۷۳,۳۷۳$
که تعداد آن‌ها ۹تا است.

۷۹- گزینه۴ از آن‌جا که $p+q=r$ است یعنی جمع ۲ عدد اول، عددی اول است، پس حتماً یکی از مقادیر p یا q برابر با ۲ است. (اگر هر دو فرد باشند، جمع آن‌ها عددی زوج می‌شود.)
با این شرایط حالت‌های مقابل امکان دارد اتفاق بیفتد:

$$۲+۳=۵ \quad , \quad ۲+۵=۷ \quad , \quad ۲+۱۱=۱۳$$
$$۲+۱۷=۱۹ \quad , \quad ۲+۲۹=۳۱ \quad , \quad ۲+۴۱=۴۳$$

که ۶ حالت است.

۸۰- گزینه۱ از آن‌جا که $a>b$ است، پس a حتماً عددی اول و فرد است ولی b می‌تواند زوج یا فرد باشد. با این شرایط دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول: $\left.\begin{matrix} a\ \text{فرد} \\ b\ \text{فرد} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{a}_{\text{فرد}}+\underbrace{b\underbrace{(a+b)}_{\text{زوج}}}_{\text{زوج}} \Rightarrow$ فرد = زوج + فرد

حالت دوم: $\left.\begin{matrix} a\ \text{فرد} \\ b\ \text{زوج} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{a}_{\text{فرد}}+\underbrace{\underbrace{b}_{\text{زوج}}(a+b)}_{\text{زوج}} \Rightarrow$ فرد = زوج + فرد

پس در هر حالت حاصل $a+b(a+b)$ فرد است.

۸۱- گزینه۴ از آن‌جا که a و b اول هستند، تنها حالتی که $a-b$ و $a+b$ می‌توانند اول (عددی فرد) باشند این است b (عدد کوچک‌تر) برابر ۲ باشد. با بررسی حالت‌های مختلف:

$a=۵, b=۲$

در این صورت:

$a+b=۷, a-b=۳$

پس:

$a+b+(a-b)+(a+b)=۵+۲+۳+۷=۱۷$

که ۱۷ عددی اول است.

۸۲- گزینه۴ توجه داشته باشید که اگر جمع دو عدد اول، اول شود حتماً یکی از آن‌ها ۲ است، زیرا اگر هر دو فرد باشد مجموع ۲ عدد فرد، عددی زوج است که نمی‌تواند اول باشد. پس از آن‌جا که $a+b$ اول است حتماً یکی از آن‌ها عدد ۲ است.

هم‌چنین چون $c+d+e$ اول است، مطمئناً هر ۳ فرد هستند. زیرا اگر یکی از آن‌ها ۲ باشد، مجموع $c+d+e$ زوج می‌شود.

در بین گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نمی‌تواند اول باشد، زیرا $a+b$ فرد و c فرد است و جمع آن‌ها زوج می‌شود.

گزینهٔ (۲): نمی‌تواند اول باشد زیرا از بین ۵ عدد یکی ۲ و ۴تا فرد هستند که مجموع آن‌ها زوج است.

گزینهٔ (۳): نمی‌تواند اول باشد زیرا جمع ۲ عدد فرد، زوج است.

گزینهٔ (۴): امکان دارد اول باشد، زیرا ممکن است $b=۲$ و e نیز فرد باشد.

تجزیه

۸۳- گزینه۲ کافی است تعداد عامل ۳ را در اعداد ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۵ و ۹۰ پیدا کنیم، زیرا سایر اعداد در تجزیهٔ خود عامل ۳ را ندارند.

	۹۰	۷۵	۶۰	۴۵	۳۰	۱۵
تعداد عامل‌های ۳	۲	۱	۱	۲	۱	۱

پس توان عدد ۳ در تجزیهٔ این عدد برابر با $۸=۲+۱+۱+۲+۱+۱$ است.

۸۴- گزینه۵ با تجزیهٔ عدد هر گزینه، عدد موردنظر را مشخص می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): $۶۲۵=۵^۴=۵\times۵\times۵\times۵$ × (متمایز نیستند)

گزینهٔ (۲): $۱۲۴=۲\times۲\times۳۱$ × (۴ عدد نیست)

گزینهٔ (۳): $۱۰۸=۲\times۳\times۳\times۶$ × (متمایز نیستند)

گزینهٔ (۴): $۲۱۸۷=۳^۷$ × (متمایز نیستند)

گزینهٔ (۵): $۲۰۲۵=۳^۴\times۵^۲=۳\times۹\times۱۵\times۵$

۸۵- گزینه۴ به کمک تجزیه، این ۴ عدد را پیدا می‌کنیم: (دقت شود اعداد متمایز هستند.)

$۱۰۰=۲^۲\times۵^۲=۱\times۲\times۵\times(۲\times۵)$

پس مجموع آن‌ها برابر است با:

$۱+۲+۵+۱۰=۱۸$

۸۶- گزینه۱ با توجه به تجزیهٔ عدد ۶۰۰۶۰ می‌توان سن هر یک از فرزندان را به دست آورد.

$۶۰۰۶۰=۱۰\times۶\times۷\times۱۱\times۱۳$

(دقت کنید نمی‌توان ۱۰ را به صورت ۵×۲ نوشت زیرا بچهٔ ۲ و ۵ ساله نمی‌تواند به مدرسه برود.)

با توجه به تجزیهٔ عدد، حاصل‌جمع سن فرزندان برابر است با:

$۱۰+۶+۷+۱۱+۱۳=۴۷$

۸۷- گزینه۴ تجزیهٔ عدد ۲۰۱۳ به صورت مقابل است:

$۲۰۱۳=۳\times۱۱\times۶۱=۳\times۶۷۱=۳۳\times۶۱$

با توجه به این‌که این دو نفر پدر و پسر هستند (اختلاف سن آن‌ها باید منطقی باشد).

سن پسر ۳۳ و سن پدر ۶۱ است. پس جمشید ۶۱ سال قبل یعنی در سال $۱۹۵۲=۶۱-۲۰۱۳$ متولد شده است.

۸۸- گزینهٔ۲ با توجه به عواملی که در تجزیهٔ ۱۶۶۴ ظاهر می‌شود تعداد فرزندان را مشخص می‌کنیم. $۱۶۶۴ = ۲^{۷} \times ۱۳$

حال این تجزیه را طوری به شکل دیگری می‌نویسیم که بزرگ‌ترین شمارندهٔ آن ۲ برابر کوچک‌ترین شمارندهٔ آن باشد، یعنی: $۱۶۶۴ = ۸ \times ۱۳ \times ۱۶$

پس این فرد، ۳ فرزند دارد.

۸۹- گزینهٔ۳ ابتدا عدد ۱۰۰۰ را تجزیه می‌کنیم، سپس با توجه به عوامل ظاهرشده در تجزیهٔ آن این عدد را پیدا می‌کنیم. $۱۰۰۰ = ۲^{۳} \times ۵^{۳}$

با توجه به این‌که ۳تا عامل ۲ و ۳تا عامل ۵ در این تجزیه وجود دارد به ۳ حالت می‌توان ساختار مدنظر مسئله را ایجاد کرد:

(۱) ۲،۲،۲،۵،۵،۵

(۲) ۴،۲،۵،۵،۵

(۳) ۸،۵،۵،۵

ولی از آن‌جا که کوچک‌ترین عدد را می‌خواهیم، پس حالت سوم درست است که مجموع ارقام آن برابر است با: $۸ + ۵ + ۵ + ۵ = ۲۳$

۹۰- گزینهٔ۳ ابتدا عدد ۳۰۵۰ را تجزیه کرده و سپس با توجه به تجزیهٔ آن در مورد تعداد کتاب‌های دریافتی هر مدرسه اظهارنظر می‌کنیم.

$۳۰۵۰ = ۵^{۲} \times ۲ \times ۶۱$

پس می‌توان گفت: $۳۰۵۰ = ۵۰ \times ۶۱$

از آن‌جا که ۱۱ مدرسه حاضر نشدند (اختلاف ۵۰ و ۶۱ نیز ۱۱ واحد است) پس هر مدرسه ۵۰ (۵۰=۱۱−۶۱) کتاب دریافت کرده‌اند.

۹۱- گزینهٔ۳ با توجه به تجزیهٔ عدد گزینه‌ها، عدد موردنظر را تعیین می‌کنیم.

در گزینهٔ (۳): $۱۴۵۸ = ۲ \times ۳^{۶}$

از طرفی تعداد دانش‌آموزان ۵تاست. یعنی حداکثر در حاصل‌ضرب به وجود آمده، ۵ عامل ۳ می‌تواند ظاهر شود. (چون عددی که توسط هر یک از آن‌ها انتخاب می‌شود حداکثر یک عامل ۳ دارد) در صورتی که در تجزیهٔ ۱۴۵۸، عدد $۳^{۶}$ ظاهر شده است که این امکان‌پذیر نیست.

اما در مورد سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $۷۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳$

گزینهٔ (۲): $۹۶ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۶$

گزینهٔ (۴): $۷۷۷۶ = ۶^{۵}$

۹۲- گزینهٔ۴ با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم ۵۰۳ بر x و y برابر با ۲۰ است پس عدد: $۵۰۳ - ۲۰ = ۴۸۳$

هم بر x و هم بر y بخش‌پذیر است. (دقت شود که x و y مطمئناً بزرگ‌تر از ۲۰ هستند زیرا باقی‌ماندهٔ ۲۰ ایجاد شده است.)

از طرفی تجزیهٔ ۴۸۳ برابر است با: $۴۸۳ = ۳ \times ۷ \times ۲۳ = ۲۱ \times ۲۳$

پس x و y به ترتیب برابر با ۲۱ و ۲۳ هستند.

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۵۰۳ بر $xy = ۴۸۳$ برابر است با:

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۳ & ۴۸۳ \\ \hline ۴۸۳ & ۱ \\ \hline ۲۰ & \end{array}$$

شمارنده

۹۳- گزینهٔ۳ با تجزیهٔ عدد داریم: $۱۹۹۱ = ۱۱ \times ۱۸۱$

پس بزرگ‌ترین شمارندهٔ اول عدد ۱۹۹۱، عدد ۱۸۱ است.

۹۴- گزینهٔ۱ این عدد از کوچک‌ترین ۶ عدد اول ساخته شده است. یعنی: $۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ = ۳۰۰۳۰$

۹۵- گزینهٔ۴ در واقع اعداد مدنظر صورت سؤال اعدادی هستند که در تجزیهٔ آن‌ها فقط عوامل ۲ یا ۳ ظاهر شده باشد. این اعداد عبارت‌اند از:

$۲^{۷} = ۱۲۸ ، ۲^{۶} \times ۳ = ۱۹۲ ، ۲^{۴} \times ۳^{۲} = ۱۴۴ ، ۲^{۲} \times ۳^{۳} = ۱۰۸ ، ۲ \times ۳^{۴} = ۱۶۲$

۹۶- گزینهٔ۳ از آن‌جا که اعداد مدنظر فرد هستند، پس در تجزیهٔ آن‌ها عدد ۲ وجود ندارد، با بررسی اعداد مختلف، اعدادی که این خاصیت را دارند عبارت‌اند از:

$۳ \times ۳ \times ۳ ، ۳ \times ۳ \times ۵ ، ۳ \times ۳ \times ۷ ، ۳ \times ۳ \times ۱۱ ، ۳ \times ۵ \times ۵$

۹۷- گزینه۱ مشخص است که $۳^{۱۱}$ و $۵^{۱۳}$ هر دو عدد فرد هستند، پس $۵^{۱۱}+۳^{۱۱}$ عددی زوج است.
بنابراین کوچک‌ترین عدد اولی که شمارندهٔ آن است، عدد ۲ است.

۹۸- گزینه۱ عدد $۳^{۳۹}+\ldots+۳^{۱۲}+۳^{۱۱}+۳^{۱۰}$ از جمع ۳۰ عدد فرد تشکیل شده است که مقداری زوج است. پس کوچک‌ترین شمارندهٔ اول این عدد برابر با ۲ است.

۹۹- گزینه۲ ابتدا عدد N را به صورت ضرب عوامل اول می‌نویسیم و سپس با توجه به این ضرب، شمارنده‌های اول آن را مشخص می‌کنیم.

$$N=۲^{۱۰}\times ۳^{۸}+۳^{۱۰}\times ۲^{۸}=۲^{۸}\times ۳^{۸}(۲^{۲}+۳^{۲})=۲^{۸}\times ۳^{۸}\times ۱۳$$

پس تعداد شمارنده‌های اول عدد N برابر با ۳تا است.

۱۰۰- گزینه۲ ابتدا عبارت داده‌شده را به صورت ضرب عوامل اول می‌نویسیم.

$$۱۳\times ۸\times ۳۹\times ۵-۳۰\times ۱۳=۱۳\times ۲^{۳}\times ۳\times ۱۳\times ۵-۲\times ۳\times ۵\times ۱۳=۲\times ۳\times ۵\times ۱۳(۲^{۳}\times ۱۳-۱)$$

$$=۲\times ۳\times ۵\times ۱۳\times ۵۱=۲\times ۳^{۲}\times ۵\times ۱۳\times ۱۷$$

پس بزرگ‌ترین شمارندهٔ اول این عبارت برابر با ۱۷ است.

۱۰۱- گزینه۲ با توجه به این‌که سه رقم آخر این عدد ۱۹۵ است، پس این عدد، عددی فرد است.
پس ۲ نمی‌تواند شمارندهٔ آن باشد، اما عدد ۵ حتماً شمارندهٔ آن است. (رقم یکان آن ۵ است)
از طرفی مجموع ارقام آن ۱۹ است، پس این عدد بر ۳ بخش‌پذیر نیست، بنابراین کوچک‌ترین شمارندهٔ اول این عدد، ۵ است.

۱۰۲- گزینه۳ ابتدا کوچک‌ترین عددی که ۴ مقسوم‌علیه اول دارد را مشخص می‌کنیم و سپس با توجه به آن، مقدار n را تعیین می‌کنیم. کوچک‌ترین عددی که ۴ مقسوم‌علیه اول متفاوت دارد برابر است با: $۲\times ۳\times ۵\times ۷=۲۱۰$

پس: $۱۱n<۲۱۰ \Rightarrow n<\frac{۲۱۰}{۱۱}\sim ۱۹$

پس بیشترین مقدار n برابر با ۱۹ است.

۱۰۳- گزینه۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:
گزینهٔ (۱): نادرست است، به طور مثال اگر $A=۲\times ۳\times ۵$ و $B=۷\times ۱۱\times ۱۳$، $A\times B$، ۶ شمارندهٔ اول دارد.
گزینهٔ (۲): درست است، زیرا اگر عددی را به توان برسانیم، تعداد شمارنده‌های اول آن تغییری نمی‌کند.
گزینهٔ (۳): نادرست است، به طور مثال اگر $A=۲\times ۳^{۲}\times ۵^{۳}$ و $B=۲^{۲}\times ۳\times ۵$ باشد، هیچ‌یک بر دیگری بخش‌پذیر نیستند.
گزینهٔ (۴): نادرست است، اگر $A=۳\times ۵\times ۷$ و $B=۱۱\times ۵\times ۷$ آن‌گاه، $A+B=(۱۱\times ۵\times ۷)+(۳\times ۵\times ۷)=(۵\times ۷)(۱۱+۳)=۲\times ۵\times ۷^{۲}$ که ثالثیه است.

۱۰۴- گزینه۴ کوچک‌ترین عددی که فقط از ارقام ۰ و ۸ تشکیل شده و بر ۱۵ بخش‌پذیر است، برابر با ۸۸۸۰ است. (این عدد باید حداقل سه‌تا ۸ داشته باشد زیرا در حالت‌های دیگر نمی‌تواند بر ۳ و ۵ یعنی بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد. هم‌چنین دقت شود لازمهٔ این‌که عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد این است که رقم یکان آن صفر باشد.)

با تجزیهٔ ۸۸۸۰ داریم: $۸۸۸۰=۲^{۴}\times ۳\times ۵\times ۳۷$

که بزرگ‌ترین شمارندهٔ اول این عدد ۳۷ است.

۱۰۵- گزینه۱ با توجه به این‌که تنها شمارندهٔ هر عدد اول مثل p، اعداد ۱ و p هستند پس: $p+۱=۱۰۲ \Rightarrow p=۱۰۱$

پس: p اختلاف شمارنده‌های $=p-۱=۱۰۱-۱=۱۰۰$

۱۰۶- گزینه۳ برای این‌که جمع هر دو شمارندهٔ یک عدد بر ۲ بخش‌پذیر باشد یا باید همهٔ شمارنده‌ها زوج باشند (زوج = زوج + زوج) یا باید همه شمارنده‌ها فرد باشند (زوج = فرد + فرد).
از طرفی هیچ عددی وجود ندارد که تمام شمارنده‌های آن زوج باشد (زیرا حداقل عدد یک شمارندهٔ آن است).
پس همهٔ شمارنده‌های عدد موردنظر باید فرد باشد؛ که تمامی اعداد فرد که تعداد آن‌ها ۲۴تا است می‌توانند عدد موردنظر باشند.

۱۰۷- گزینه۴ ابتدا عدد را تجزیه می‌کنیم و سپس با توجه به عوامل اول ظاهرشده، این شمارنده‌ها را تعیین می‌کنیم.

$$۱۰۲^{۲}=(۲\times ۳\times ۱۷)^{۲}=۲^{۲}\times ۳^{۲}\times ۱۷^{۲}$$

پس شمارنده‌های ۴رقمی عدد $۱۰۲^{۲}$ عبارت‌اند از:

$$۲\times ۳^{۳}\times ۱۷^{۲}\ ,\ ۲^{۲}\times ۳\times ۱۷^{۲}\ ,\ ۲\times ۳\times ۱۷^{۲}\ ,\ ۳^{۲}\times ۱۷^{۲}\ ,\ ۲^{۲}\times ۱۷^{۲}$$

۱۰۸- گزینهٔ۴ شمارنده‌های عدد ۶۰ عبارت‌اند از: $1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60$

که با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ (۱): $25=10+15$

گزینهٔ (۲): $26=20+6$

گزینهٔ (۳): $27=12+15$

اما عدد گزینهٔ (۴) یعنی ۲۸ را نمی‌توان با این ساختار تولید کرد.

۱۰۹- گزینهٔ۳ ابتدا عدد ۲۰۰۲ را تجزیه می‌کنیم، سپس با توجه به اعداد ظاهرشده در تجزیهٔ آن، گزینهٔ موردنظر را مشخص می‌کنیم.

$2002=2\times7\times11\times13$

در بین گزینه‌ها، گزینهٔ (۳) نمی‌تواند مقدار ۲۰۰۲ را داشته باشد؛ زیرا عدد $17a+17b=17(a+b)$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است که در تجزیهٔ ۲۰۰۲ وجود ندارد.

۱۱۰- گزینهٔ۳ ابتدا عدد را تجزیه می‌کنیم و سپس با توجه به آن تعداد شمارنده‌ها را تعیین می‌کنیم.

$49^7=(7^2)^7=7^{14}$

پس: 49^7 تعداد شمارنده‌های $=14+1=15$

۱۱۱- گزینهٔ۴ فرض کنید $a=3^n$ پس:

$$\frac{a}{27}=\frac{3^n}{3^3}=3^{n-3}$$

با توجه به این‌که تعداد شمارنده‌های $\frac{a}{27}$ برابر با ۸ است، پس:

$(n-3)+1=8 \Rightarrow n-2=8 \Rightarrow n=10$

یعنی: $a=3^{10}$

۱۱۲- گزینهٔ۴ ابتدا ساختار تجزیه‌شدهٔ هر یک از اعداد $17a$، $13a$ و $7a$ را ایجاد می‌کنیم:

$a=13^{17}\times17^{13}$

پس:

$17a=13^{17}\times17^{14} \Rightarrow x=(17+1)(14+1)=270$

$13a=13^{18}\times17^{13} \Rightarrow y=(18+1)(13+1)=266$

$7a=13^{17}\times17^{13}\times7 \Rightarrow z=(17+1)(13+1)(1+1)=504$

بنابراین: $y<x<z$

۱۱۳- گزینهٔ۱ ابتدا تجزیهٔ کامل عبارت داده‌شده به عوامل اول را مشخص می‌کنیم و سپس با توجه به آن تعداد شمارنده‌های آن را به دست می‌آوریم.

$(2q)^{q-1}\times p^{p-1}=2^{q-1}\times q^{q-1}\times p^{p-1}$

پس: تعداد شمارنده‌ها $=(q-1+1)(q-1+1)(p-1+1)=q\cdot q\cdot p=q^2p$

۱۱۴- گزینهٔ۲ ابتدا عدد را تجزیه کرده و سپس با توجه به تعداد شمارنده‌ها و تعداد شمارنده‌های اول آن، تعداد شمارنده‌های غیراول را به دست می‌آوریم.

$72^5=(2^3\times3^2)^5=2^{15}\times3^{10}$

72^5 تعداد شمارنده‌های $=(15+1)(10+1)=176$

از طرفی شمارنده‌های اول این عدد ۲ و ۳ هستند. پس: شمارنده‌های غیراول $=176-2=174$

۱۱۵- گزینهٔ۴ ابتدا تعداد شمارنده‌های عدد ۸۰۰ را به دست می‌آوریم و سپس از این موضوع استفاده می‌کنیم که:

تعداد شمارنده‌های مرکب عدد A = تعداد شمارنده‌های A − (تعداد عوامل اول در تجزیه + ۱)

یعنی: $800=2^5\times5^2$

تعداد شمارنده‌های ۸۰۰ $=(5+1)(2+1)=18$

پس: تعداد شمارنده‌های مرکب ۸۰۰ $=18-(2+1)=15$

۵

۱۱۶- گزینه ۱ ابتدا عدد را تجزیه می‌کنیم؛ سپس با توجه به رابطهٔ تعداد شمارنده‌ها، مقدار n را به دست می‌آوریم.

$$۲۷^{n+۱}\times ۸^{۳}=۳^{۳n+۳}\times ۲^{۹}$$

پس:

$$(۳n+۳+۱)(۹+۱)=۷۰ \Rightarrow (۳n+۴)\times ۱۰=۷۰ \Rightarrow ۳n+۴=۷ \Rightarrow n=۱$$

۱۱۷- گزینه ۱ برای به دست آوردن شمارنده‌های فرد کافی است بعد از تجزیه، توان‌های عامل‌های فرد را به اضافهٔ یک کرده و در هم ضرب کنیم.

$$۱۰۸۰۰=۲^{۴}\times ۳^{۳}\times ۵^{۲}$$

پس:

$$\text{تعداد شمارنده‌های فرد}=(۳+۱)(۲+۱)=۱۲$$

۱۱۸- گزینه ۳ تجزیهٔ عدد $۶۴^{۲۰}$ به صورت مقابل است:

$$۶۴^{۲۰}=(۲^{۶})^{۲۰}=۲^{۱۲۰}$$

همهٔ شمارنده‌های $۲^{۱۲۰}$ به‌جز عدد یک، زوج هستند (چون فقط از عامل ۲ ساخته شده‌اند) با توجه به این‌که تعداد شمارنده‌های $۲^{۱۲۰}$ برابر با $۱۲۱=۱+۱۲۰$ است پس تعداد شمارنده‌های زوج آن ۱۲۰ تا است.

۱۱۹- گزینه ۴ اگر تعداد شمارنده‌های عدد A برابر با T(A) باشد، حاصل‌ضرب شمارنده‌های A برابر است با:

$$A^{\frac{T(A)}{۲}}$$

در این سؤال:

$$\text{تعداد شمارنده‌های } ۲^{۱۲}=۱۲+۱=۱۳$$

پس:

$$\text{حاصل‌ضرب شمارنده‌های } ۲^{۱۲}=(۲^{۱۲})^{\frac{۱۳}{۲}}=۲^{۱۲\times\frac{۱۳}{۲}}=۲^{۷۸}$$

۱۲۰- گزینه ۴ شمارنده‌های عدد $۲^{۲۰}$ عبارت‌اند از:

$$۱,۲,۲^{۲},۲^{۳},\ldots,۲^{۲۰}$$

که جمع آن‌ها را می‌توان به شکل مقابل حساب کرد.

$$A=۱+۲+۲^{۲}+\cdots+۲^{۲۰}$$

$$۲A=۲+۲^{۲}+۲^{۳}+\cdots+۲^{۲۱}$$

$$A=۲A-A=۲^{۲۱}-۱$$

۱۲۱- گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\text{مجموع معکوس شمارنده‌های } A=\frac{\text{جمع شمارنده‌های } A}{A}$$

از طرفی:

$$۶۰=۲^{۲}\times ۳\times ۵$$

هم‌چنین جمع شمارنده‌های ۶۰ با توجه به روابط ذکرشده در درس‌نامه برابر است با:

$$\text{جمع شمارنده‌های } ۶۰=\left(\frac{۲^{۳}-۱}{۲-۱}\right)\left(\frac{۳^{۲}-۱}{۳-۱}\right)\left(\frac{۵^{۲}-۱}{۵-۱}\right)=۷\times ۴\times ۶=۱۶۸$$

بنابراین:

$$\text{مجموع معکوس شمارنده‌های } ۶۰=\frac{۱۶۸}{۶۰}=\frac{۱۴}{۵}$$

۱۲۲- گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\text{حاصل‌جمع معکوس شمارنده‌های } A=\frac{\text{حاصل‌جمع شمارنده‌های } A}{A}$$

با توجه به این‌که جمع شمارنده‌های ۱۲۰ برابر ۳۶۰ است پس:

$$\text{مجموع معکوس شمارنده‌های } ۱۲۰=\frac{۳۶۰}{۱۲۰}=۳$$

۱۲۳- گزینه ۲ فرض کنید عدد موردنظر A باشد. با توجه به این‌که تعداد شمارنده‌های $A^{۲}$، ۱۳تا است. پس $A^{۲}=p^{۱۲}$ که در آن p عددی اول است، (دقت شود چون تعداد شمارنده‌ها عددی اول است، این عدد فقط از یک عامل اول ساخته شده است.) یعنی:

$$A^{۲}=p^{۱۲} \Rightarrow A=p^{۶} \Rightarrow A^{۳}=p^{۱۸}$$

$$\text{تعداد شمارنده‌های } A^{۳}=۱۸+۱=۱۹$$

۱۲۴- گزینه ۳ فرض کنید عدد موردنظر A باشد.

از آن‌جا که تعداد شمارنده‌های این عدد ۱۳تا است (۱۳، عددی اول است). پس این عدد به صورت $p^{۱۲}$ که در آن p عددی اول است؛ پس:

$$A=p^{۱۲} \quad \text{و} \quad \text{مکعب } A=A^{۳}=p^{۳۶} \quad \Rightarrow \quad \text{تعداد شمارنده‌های } A^{۳}=(۳۶+۱)=۳۷$$

۱۲۵- گزینه۳ با توجه به رابطهٔ تعداد شمارنده‌ها، باید عدد ۶۸ را به صورت ضرب چند عدد بزرگ‌تر از یک بنویسیم (بیشترین تعداد عدد را باید ایجاد کنیم).

$$۶۸ = ۲\times۲\times۱۷ = (۱+۱)(۱+۱)(۱۶+۱)$$

پس:

$$\text{عدد موردنظر} = a^{۱}\times b^{۱}\times c^{۱۶}$$

که در آن a، b و c اعداد اول هستند.

۱۲۶- گزینه۱ هر عددی که دقیقاً سه شمارنده دارد ساختار تجزیهٔ آن به عوامل اول به صورت $a^{۲}$ است. که در آن a عددی اول است. این اعداد با این ساختار عبارت‌اند از:

$$۲^{۲}, ۳^{۲}, ۵^{۲}, ۷^{۲}, ۱۱^{۲}, ۱۳^{۲}, ۱۷^{۲}$$

که تعداد آن‌ها ۷تا است.

۱۲۷- گزینه۱ اگر عددی دقیقاً ۴ شمارنده داشته باشد، به یکی از دو صورت زیر است:

الف) $a^{۳}$ که در آن a عددی اول است. ب) $a\times b$ که در آن a و b اول هستند.

در مورد حالت اول تنها عدد $۵^{۳}$ قابل‌قبول است.

اما در حالت (ب) عددهای مقابل این خاصیت را دارند.

۱۱×۱۳	۷×۱۷	۵×۲۳	۳×۳۷	۲×۵۳
	۷×۱۹	۵×۲۹	۳×۴۱	۲×۵۹
			۳×۴۳	۲×۶۱
			۳×۴۷	۲×۶۷
				۲×۷۱
				۲×۷۳

که در مجموع تعداد آن‌ها ۱۶تا است.

۱۲۸- گزینه۱ اگر عددی ۲۷ شمارنده داشته باشد، به یکی از صورت‌های زیر است:

الف) $a^{۲۶}$ که در آن a عددی اول است.

در این حالت عددی به صورت $a^{۲۶}$ وجود ندارد که کوچک‌تر از ۱۰۰۰ باشد.

ب) $a^{۲}\times b^{۲}\times c^{۲}$ که در آن a، b و c اول هستند.

برای این حالت فقط عدد $۹۰۰ = ۲^{۲}\times۳^{۲}\times۵^{۲}$ وجود دارد.

پ) $a^{۲}\times b^{۸}$ که در آن a و b اول هستند.

در این حالت عددی با این ساختار که کم‌تر از ۱۰۰۰ باشد وجود ندارد.

۱۲۹- گزینه۵ با توجه به تعداد شمارنده‌های A و B، $A = p$ و $B = q^{۴}$ که در آن p و q اعدادی اول هستند. دو حالت امکان دارد پیش آید:

$$(۱)\ p = q \Rightarrow AB = p^{۵} \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها} = ۵+۱ = ۶$$

$$(۲)\ p \neq q \Rightarrow AB = pq^{۴} \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها} = (۱+۱)(۴+۱) = ۱۰$$

پس به طور دقیق نمی‌توان تعداد شمارنده‌ها را مشخص کرد.

۱۳۰- گزینه۲ عدد b به دو صورت می‌تواند باشد:

الف) $p^{۵}$ که در آن p عددی اول است. ب) $pq^{۲}$ که در آن p و q اعداد اولی هستند.

در حالت (الف)

$$۵b = ۵p^{۵} \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها} = (۱+۱)(۵+۱) = ۱۲$$

در حالت (ب) می‌توان ۲ ساختار را در نظر گرفت.

$$(۱)\ p = ۵ \Rightarrow ۵b = ۵^{۲}q^{۲} \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها} = (۲+۱)(۲+۱) = ۹$$

$$(۲)\ q = ۵ \Rightarrow ۵b = ۵^{۳}p \Rightarrow \text{تعداد شمارنده‌ها} = (۳+۱)(۱+۱) = ۸$$

پس تعداد شمارنده‌ها نمی‌تواند برابر با عدد ۱۰ باشد.

۱۴۷- گزینه۴ ابتدا عدد ۱۲۹۶ را تجزیه می‌کنیم و سپس با توجه به اعداد اول ظاهرشده، این دو عدد را تعیین کرده و حداکثر ب.م.م را به دست می‌آوریم.

$$1296 = 2^4 \times 3^4 = x \cdot y$$

برای این‌که ب.م.م x و y حداکثر شود بهتر است توان عوامل اول در x و y تا جایی که امکان دارد به هم نزدیک باشند.

$$\begin{matrix} x = 2^2 \times 3^2 \\ y = 2^2 \times 3^2 \end{matrix} \Rightarrow (x, y) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9$$

۱۴۸- گزینه۲ ابتدا اعداد را تجزیه می‌کنیم و سپس با توجه به تعریف، ب.م.م آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

$$\left.\begin{matrix} 1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7 \\ 1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \\ 1100 = 2^2 \times 5^2 \times 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1100, 1400, 1500) = 2^2 \times 5^2 = 100$$

۱۴۹- گزینه۲ تعداد شمارنده‌های مشترک چند عدد با تعداد شمارنده‌های ب.م.م آن‌ها برابر است، از طرفی:

$$\begin{cases} A = 3^6 \times 8^4 = 3^6 \times 2^{12} \\ B = 10^2 \times 12 = 2^4 \times 3 \times 5 \end{cases} \Rightarrow (A, B) = 2^4 \times 3$$

پس: تعداد شمارنده‌های مشترک A، B = تعداد شمارنده‌های(A, B) = $(4+1)(1+1) = 10$

۱۵۰- گزینه۱ مجموع چند عدد همواره بر ب.م.م آن‌ها و شمارنده‌های آن بخش‌پذیر است.

$$(a, b, c) = (34, 51, 170) = 17$$

۱۵۱- گزینه۳ با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر یک از اعداد بر d برابر با یک است، پس اگر یک واحد از هر کدام از اعداد کم شود بر d بخش‌پذیر می‌شوند و از آن‌جا که d بزرگ‌ترین مقدار ممکن است پس:

$$d = (1363-1, 1369-1, 1381-1) = (1362, 1368, 1380) = 6$$

۱۵۲- گزینه۴ با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم عددهای ۱۴۴ و ۲۲۰ بر N برابر با ۱۱ است، پس دو عدد $133 = 11 - 144$ و $209 = 11 - 220$ بر N بخش‌پذیرند.

از طرفی:

$$\begin{cases} 133 = 7 \times 19 \\ 209 = 11 \times 19 \end{cases} \Rightarrow N = 19$$

۱۵۳- گزینه۴ تعداد توپ‌هایی که می‌توان در هر جعبه قرار داد برابر با ب.م.م ۱۰۸ و ۱۸۰ است، یعنی:

$$(180, 108) = 36$$

اما تعداد جعبه‌ها برابر است با:

$$\frac{108}{36} + \frac{180}{36} = 3 + 5 = 8$$

۱۵۴- گزینه۴ فرض کنید:

$$\begin{array}{r|l} 478 & N \\ \hline \vdots & a \\ \hline p & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 392 & N \\ \hline \vdots & b \\ \hline p & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 263 & N \\ \hline \vdots & c \\ \hline p & \end{array}$$

پس:

$$478 = Na + p \ (1)$$

$$392 = Nb + p \ (2)$$

$$263 = Nc + p \ (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 478 - 392 = Na - Nb \Rightarrow 86 = N(a-b)$$

پس عدد N شمارندهٔ ۸۶ است.

$$\xrightarrow{(1),(3)} 478 - 263 = Na - Nc \Rightarrow 215 = N(a-b)$$

پس عدد N شمارندهٔ ۲۱۵ است.

$$\xrightarrow{(2),(3)} 392 - 263 = Nb - Nc \Rightarrow 129 = N(b-c)$$

پس عدد N شمارندهٔ ۱۲۹ است.

یعنی N شمارندهٔ مشترک ۸۶، ۲۱۵ و ۱۲۹ است. اما تنها شمارندهٔ مشترک این سه عدد، ۴۳ است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک

۱۵۵- گزینهٔ۳ از آن‌جا که تشخیص این شخص اشتباه بود، پس این عدد هم‌زمان مضرب ۲ و ۵ یعنی مضرب ۱۰ نیست.

۱۵۶- گزینهٔ۳ تعداد حاضرین $\frac{۶}{۷}$ تعداد غایبین است؛ یعنی $\frac{۶}{۱۳} = \frac{۶}{۶+۷}$ کل است.

پس تعداد کل افراد باید مضرب ۱۳ باشد.

اما تنها مضرب ۱۳ بین ۱۰۰ تا ۱۱۵، عدد ۱۰۴ است.

۱۵۷- گزینهٔ۲ ابتدا اعداد را تجزیه کرده، سپس ک.م.م آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱۵۰ = ۲\times ۳\times ۵^{۲} \\ ۱۲۰ = ۲^{۳}\times ۳\times ۵ \\ ۲۰۰ = ۲^{۳}\times ۵^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow [۱۵۰,۱۲۰,۲۰۰] = ۲^{۳}\times ۳\times ۵^{۲}$$

که تعداد شمارنده‌های اول آن ۳تا است.

۱۵۸-. ۱۵۸- **گزینهٔ۴** با توجه به دستورالعمل محاسبهٔ ک.م.م داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A = ۲^{a}\times ۳ \\ B = ۲\times ۳^{b} \end{array}\right\} \Rightarrow [A,B] = ۲^{a}\times ۳^{b}$$

از طرفی:

$$[A,B] = ۷۲ = ۲^{۳}\times ۳^{۲}$$

پس:

$$۲^{a}\times ۳^{b} = ۲^{۳}\times ۳^{۲} \Rightarrow a = ۳, b = ۲$$

۱۵۹- گزینهٔ۳ ابتدا عدد ۱۲۶ را تجزیه می‌کنیم و سپس با توجه به عوامل ظاهرشده در تجزیهٔ آن و این‌که $a + b = ۶۰$، مقدار a و b را به دست می‌آوریم.

$$[a,b] = ۱۲۶ = ۲\times ۳^{۲}\times ۷$$

یعنی حداقل یکی از اعداد a یا b باید بر ۷ بخش‌پذیر باشند. این اعداد عبارت‌اند از:

$$۷,۱۴,۲۱,\ldots$$

که در بین این اعداد، عدد ۴۲ در شرایط مسئله صدق می‌کند، زیرا اگر:

$$a = ۴۲$$

$$a + b = ۶۰ \Rightarrow ۴۲ + b = ۶۰ \Rightarrow b = ۱۸ = ۲\times ۳^{۲}\ ,\ a = ۴۲ = ۲\times ۳\times ۷$$

و

$$[a,b] = ۲\times ۳^{۲}\times ۷$$

پس:

$$a - b = ۴۲ - ۱۸ = ۲۴$$

۱۶۰- گزینهٔ۳ با توجه به این‌که $[a, ۳a+۷] = ۳a + ۷$، پس $۳a + ۷$ بر a بخش‌پذیر است و چون ۷ بر ۷ بخش‌پذیر است، پس $۳a$ نیز باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد، یعنی a مضرب ۷ است.

۱۶۱- گزینهٔ۲ از آن‌جا که باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۱۸ یا ۲۰ برابر با ۷ است، کافی است ک.م.م این دو عدد را به دست آورده، به اضافهٔ ۷ کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۱۸ = ۲\times ۳^{۲} \\ ۲۰ = ۲^{۲}\times ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow [۱۸,۲۰] = ۲^{۲}\times ۳^{۲}\times ۵ = ۱۸۰$$

پس عدد موردنظر برابر است با:

$$۱۸۰ + ۷ = ۱۸۷$$

۱۶۲- گزینهٔ۳ برای به دست آوردن این عدد کافی است ک.م.م سه عدد ۷، ۱۱ و ۱۳ را به دست آورده و مضارب آن را در نظر بگیریم، سپس اولین مضربی که در قرن ۲۱ قرار می‌گیرد را به علاوهٔ ۳ کنیم.

$$[۷,۱۱,۱۳] = ۷\times ۱۱\times ۱۳ = ۱۰۰۱$$

۱۰۰۱ کم‌تر از ۲۰۰۰ است، پس عدد موردنظر برابر است با:

$$(۱۰۰۱\times ۲) + ۳ = ۲۰۰۵$$

۱۶۳- گزینه۲ کوچک‌ترین عددی که بر اعداد ۱۴، ۲۰ و ۲۴ بخش‌پذیر است، ک.م.م آن‌ها است.

برای به دست آوردن همه اعداد چهاررقمی که این خاصیت را دارند کافی است مضاربی از ک.م.م این سه عدد را به دست آوریم که چهاررقمی هستند.

$$\left.\begin{aligned}14&=2\times7\\20&=2^2\times5\\24&=2^3\times3\end{aligned}\right\}\Rightarrow[14,20,24]=2^3\times3\times5\times7=840$$

پس اعداد موردنظر عبارت‌اند از: $2\times840,3\times840,\ldots,11\times840=9240$

که تعداد آن‌ها ۱۰تا است.

۱۶۴- گزینه۳ با توجه به صورت سؤال اعدادی مدنظر است که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۲۱ و ۳۵ برابر با یک شود. پس کافی است ک.م.م ۲۱ و ۳۵ را به دست آورده و یک واحد به آن اضافه کنیم.

$$\left.\begin{aligned}21&=3\times7\\35&=5\times7\end{aligned}\right\}\Rightarrow[21,35]=3\times5\times7=105$$

پس اولین عدد، برابر با ۱۰۶ است. برای به دست آوردن بقیهٔ اعداد کافی است مضارب ک.م.م را به علاوهٔ یک کنیم، یعنی اعداد:

$$1,106,(2\times105)+1,3\times(105)+1,\ldots,(9\times105)+1$$

که تعداد آن‌ها ۱۰تا است.

(دقت شود باقی‌ماندهٔ تقسیم یک بر ۲۱ و ۳۵ برابر با یک می‌شود.)

۱۶۵- گزینه۲ با توجه به سؤال، اختلاف مقسوم‌علیه و باقی‌مانده در هر مورد برابر با ۲ است، پس کافی است ک.م.م سه عدد ۳، ۷ و ۱۱ را به دست آوریم منهای ۲ کنیم، یعنی: $[3,7,11]-2=231-2=229$ = اولین عدد

پس: $100\times[3,7,11]-2=100\times231-2=23098$ = صدمین عدد

۱۶۶- گزینه۱ با توجه به این‌که در تقسیم بر هر یک از اعداد ۲ تا ۱۰ مقدار باقی‌مانده یکی کم‌تر از خود عدد است، پس کافی است ک.م.م این اعداد را به دست آورده منهای یک کنیم. $[2,3,4,\ldots,10]=2^3\times3^2\times5\times7=2520$.

$$2520-1=2519$$

$$\begin{matrix}-&+&-&+\\2&5&1&9\end{matrix}$$

از طرفی باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۱۱ برابر است با:

$$(5+9)-(2+1)=11$$

یعنی این عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

سؤالات ترکیبی از ب.م.م و ک.م.م

۱۶۷- گزینه۲ ابتدا اعداد را تجزیه می‌کنیم و سپس با توجه به عوامل ظاهرشده، ب.م.م و ک.م.م را به دست می‌آوریم.

$$90=2\times3^2\times5\quad,\quad42=2\times3\times7\quad,\quad108=2^2\times3^3$$

پس:

$$(90,42,108)=2\times3=6$$

$$[90,42,108]=2^2\times3^3\times5\times7=3780$$

۱۶۸- گزینه۴ فرض کنید a و b اعداد موردنظر باشند که $a=45$.

می‌دانیم:

$$a\times b=(a,b)\times[a,b]$$

پس:

$$45\times b=9\times360\Rightarrow b=\frac{9\times360}{45}=72$$

۱۶۹- گزینه۳ می‌دانیم اگر دو عدد x و y نسبت به هم اول باشند آن‌گاه: $(x,y)=1\quad,\quad[x,y]=xy$

پس:

$$\frac{(x,y)}{[x,y]}=\frac{1}{xy}$$

۱۷۰- گزینه۱ با توجه به رابطهٔ:

$$a\times b=(a,b)\times[a,b]$$

پس: $a\times b=2\times144=288$ = مساحت مستطیل

۱۷۱- گزینه۲ می‌دانیم بین دو عدد a و b رابطهٔ مقابل برقرار است:

$$a\times b=[a,b]\times(a,b)$$

با توجه به این‌که یکی از اعداد ۸ واحد بیشتر از دیگری است، پس:

$$a=b+۸$$

یعنی:

$$b\cdot(b+۸)=[a,b]\times(a,b)=۳۸۴ \Rightarrow b(b+۸)=۳۸۴=۳\times ۲^{۷}=۲^{۴}\times ۳\times ۲^{۳}=۱۶\times ۲۴$$

پس:

$$b=۱۶ \quad , \quad a=۲۴ \quad , \quad a+b=۱۶+۲۴=۴۰$$

۱۷۲- گزینه۳ با توجه به این‌که $a=۳b$، پس a بر b و ۳ بخش‌پذیر است، یعنی:

$$[a,b]=a \quad , \quad (a,b)=b$$

پس:

$$\frac{(b,[a,b])}{[b,a]}=\frac{(b,a)}{a}=\frac{b}{a}=\frac{b}{۳b}=\frac{۱}{۳}$$

۱۷۳- گزینه۵ با توجه به این‌که $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۲}$، می‌توان نوشت:

$$a=۳k \quad , \quad b=۲k$$

پس:

$$\frac{[a,b]}{(a,b)}=\frac{۲\times ۳\times k}{k}=۶$$

۱۷۴- گزینه۳ دقت کنید که:

$$M\times N=[M,N]\times(M,N)=A\times B$$

پس $A\times B$ بر $M\times N$ بخش‌پذیر است، یعنی:

$$(MN,AB)=MN$$

۱۷۵- گزینه۱ از آن‌جا که x و y دو عدد اول متمایز هستند پس:

$$(x,y)=۱ \quad , \quad [x,y]=xy$$

بنابراین:

$$\frac{(x,y)[x,y]\times x\times y}{x\times(y,y^{۲})}=\frac{۱\times x\times y\times x\times y}{x\times y}=xy$$

۱۷۶- گزینه۱ می‌دانیم اگر x شمارندهٔ y باشد (y بر x بخش‌پذیر است) آن‌گاه:

$$(x,y)=x \quad , \quad [x,y]=y$$

از طرفی اگر y بر x بخش‌پذیر باشد آن‌گاه ۳y نیز بر x بخش‌پذیر است پس:

$$\frac{[x,y]\cdot(x,۳y)}{(x,۱)[y,۱]}=\frac{y\times x}{۱\times y}=x$$

۱۷۷- گزینه۳ با توجه به صورت سؤال $(x,y)=۶$، یعنی x و y بر ۶ بخش‌پذیرند.
اما $(x,z)=۸$، یعنی x و z بر ۸ بخش‌پذیرند.
پس x بر ۶ و ۸، یعنی بر ک.م.م ۶ و ۸ یعنی ۲۴ بخش‌پذیر است.
اما:

$$۵۰<x<۹۵$$

پس:

$$x=۲۴\times ۳=۷۲$$

جمع ارقام x برابر است با:

$$۷+۲=۹$$

۱۷۸- گزینه۴ ابتدا هر یک از اعداد داده‌شده را تجزیه می‌کنیم و سپس با توجه به دستورالعمل محاسبهٔ ب.م.م مقدار x و y را به دست می‌آوریم.

$$۴^{x}\times ۱۸^{y}=۲^{۲x}\times ۲^{y}\times ۳^{۲y}=۲^{۲x+y}\times ۳^{۲y}$$

$$۸^{y}\times ۱۲^{x}=۲^{۳y}\times ۲^{۲x}\times ۳^{x}=۲^{۲x+۳y}\times ۳^{x}$$

$$\Rightarrow (۴^{x}\times ۱۸^{y},۸^{y}\times ۱۲^{x})=۲^{۲x+y}\times ۳^{x}$$

از طرفی $۳\times ۲^{۴}=۴۸$ پس:

$$x=۱$$

$$۲x+y=۴ \Rightarrow y=۲$$

بنابراین:

$$[x^{y},y^{x}]=[۱,۲]=۲$$

۱۷۹- گزینه۲ با توجه به ساختار ب.م.م و ک.م.م، مجموع B و A را پیدا می‌کنیم.

$$(A,B)=۱۴=۲\times ۷$$

$$[A,B]=۲۱۰=۲\times ۳\times ۵\times ۷$$

پس دو حالت پیش می‌آید. (دقت شود A بر B بخش‌پذیر نیست.)

حالت اول $\Rightarrow \begin{cases} A=۲\times ۵\times ۷=۷۰ \\ B=۲\times ۳\times ۷=۴۲ \\ \hline A+B=۱۱۲ \end{cases}$

حالت دوم $\Rightarrow \begin{cases} A=۲\times ۳\times ۷=۴۲ \\ B=۲\times ۵\times ۷=۷۰ \\ \hline A+B=۱۱۲ \end{cases}$

الگوریتم غربال

۱۸۰- گزینه۲ با توجه به این‌که ۲۵ با مضارب ۵ خط می‌خورد عدد بعدی نیز با مضرب ۵ خط می‌خورد که ۳۵ است.

۱۸۱- گزینه۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۳۹۵ بر ۵ بخش‌پذیر است پس زودتر از همه خط می‌خورد، بعد از آن ۳۲۳ که بر ۱۷ بخش‌پذیر است $(۱۹\times۱۷=۳۲۳)$ خط می‌خورد، سپس عدد ۳۹۱ که بر ۱۷ بخش‌پذیر است خط می‌خورد $۲۳\times۱۷=۳۹۱$ و در نهایت عدد $۱۹^{۲}=۳۶۱$ خط می‌خورد.

۱۸۲- گزینه۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): عدد ۳۲۵۶ از همه زودتر خط می‌خورد چون زوج است.

گزینهٔ (۳) و (۴): از طرفی ۳۸۰۱ بر ۳ و ۳۵۵۳ بر ۱۱ بخش‌پذیر است و در نوبت بعدی خط می‌خورند.

گزینهٔ (۲): اما عدد ۴۱۴۱ بر ۴۱ و ۱۰۱ بخش‌پذیر است و دیرتر از بقیه خط می‌خورند.

۱۸۳- گزینه۱ اعدادی که در این محدوده با مضارب ۵ خط می‌خورند عبارت‌اند از:

۲۵,۳۵,۵۵,۶۵,۸۵,۹۵,...

پس ۸۵، ۵اُمین عددی است که خط می‌خورد.

۱۸۴- گزینه۱ می‌دانیم ۱۲۵ با مضرب ۵ خط می‌خورد. پس ابتدا تعداد اعدادی که با مضرب ۲ و ۳ خط خورده‌اند را به دست می‌آوریم.

ابتدا عدد یک خط می‌خورد.

تعداد اعدادی که با مضرب ۲ خط می‌خورند برابر است با:

$$\frac{۱۰۰۰-۴}{۲}+۱=۴۹۹$$

تعداد اعدادی که با مضرب ۳ خط می‌خورند برابر است با:

$$\frac{۹۹۹-۹}{۶}+۱=۱۶۶$$

از طرفی مضارب ۵ که قبل از ۱۲۵ خط خورده‌اند عبارت‌اند از:

۲۵,۳۵,۵۵,۶۵,۸۵,۹۵,۱۱۵

که تعداد آن‌ها ۷تا است.

پس تا این‌جا $۶۷۳=۷+۱۶۶+۴۹۹+۱$ عدد خط خورده‌اند پس ۱۲۵، ۶۷۴اُمین عددی است که خط می‌خورد.

۱۸۵- گزینه۱ ابتدا عدد ۱ خط می‌خورد.

تعداد اعدادی که با مضرب ۲ خط می‌خورند برابر است با:

$$\frac{۴۰-۴}{۲}+۱=۱۹$$

از طرفی تعداد اعدادی که با مضرب ۳ خط می‌خورند برابر است با:

$$\frac{۳۹-۹}{۶}+۱=۶$$

پس تا الان $۲۶=۶+۱۹+۱$ عدد خط خورده است. بنابراین ۲۷ اُمین عدد، اولین عددی است که با مضرب ۵ خط می‌خورد یعنی ۲۵.

۱۸۶- گزینه۱ ابتدا عدد یک خط می‌خورد.

تعداد اعدادی که با مضرب ۲ خط می‌خورند برابر است با:

$$\frac{۱۰۰-۴}{۲}+۱=۴۹$$

پس ۵۱ اُمین عدد، اولین عددی است که با مضرب۳ خط می‌خورد یعنی ۹.

۱۸۷- گزینه۴ با توجه به این‌که $۱۵\sim\sqrt{۲۵۰}$، پس آخرین عدد، با مضرب ۱۳ خط می‌خورد (۱۳ بزرگ‌ترین عدد اول کوچک‌تر از ۱۵ است). از طرفی اعدادی که با مضرب ۱۳ خط می‌خورند عبارت‌اند از:

$$۱۳\times۱۳=۱۶۹$$

$$۱۳\times۱۷=۲۲۱$$

$$۱۳\times۱۹=۲۴۷ \Rightarrow \text{آخرین عدد}$$

۱۸۸- گزینه۴ در الگوریتم غربال، همیشه بعد از هر عدد اول مثل p عدد بعدی که خط می‌خورد p^{2} و عدد بعدی px است که x اولین عدد بزرگ‌تر از p است، یعنی در این سؤال دومین عددی که با مضرب ۱۹ خط می‌خورد ۲۳×۱۹ است.

۱۸۹- گزینه۲ ابتدا عدد ۱ خط می‌خورد.

تعداد اعدادی که با مضارب ۲ خط می‌خورند برابر است با:

$$\frac{۱۵۰-۴}{۲}+۱=۷۴$$

تعداد اعدادی که با مضارب ۳ خط می‌خورند:

$$\frac{۱۴۷-۹}{۶}+۱=۲۴$$

اعدادی که با مضارب ۵ خط می‌خورند: (۹تا) ۲۵,۳۵,۵۵,۶۵,۸۵,۹۵,۱۱۵,۱۲۵,۱۴۵

اعدادی که با مضارب ۷ خط می‌خورند: (۵تا) ۴۹,۷۷,۹۱,۱۱۹,۱۳۳

اعدادی که با مضارب ۱۱ خط می‌خورند: (۲تا) ۱۲۱,۱۴۳

که تعداد کل آن‌ها برابر است با:

$$۱+۷۴+۲۴+۹+۵+۲=۱۱۵$$

۱۹۰- گزینه۳ برای بررسی این موضوع باید تعیین کنیم که تعداد عوامل اول کدام‌یک از اعداد بیشتر است. این تشخیص را با تجزیهٔ اعداد انجام می‌دهیم که در بین گزینه‌ها عدد $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ بیشترین عامل اول را دارد.

۱۹۱- گزینه۲ از آن‌جا که این عدد مرکب بر هیچ‌یک از اعداد اول یک‌رقمی بخش‌پذیر نیست و کوچک‌ترین مقدار ممکن است پس باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

کوچک‌ترین مضرب ۱۱ که بر اعداد اول قبل از خودش بخش‌پذیر نیست برابر با $121 = 11 \times 11$ است که مجموع ارقام آن برابر با ۴ است.

۱۹۲- گزینه۳ با توجه به این‌که $\sqrt{400} = 20$، باید بخش‌پذیر بودن یا نبودن عدد موردنظر را بر هر یک از اعداد اول کم‌تر از ۲۰ یعنی ۱۹،۱۷،۱۳،۱۱،۷،۵،۳،۲ بررسی کنیم که تعداد آن‌ها ۸تا است.

۱۹۳- گزینه۲ با توجه به این‌که $\sqrt{1000} \simeq 31/6$، باید بخش‌پذیر بودن یا نبودن عدد موردنظر را بر هر یک از اعداد اول کم‌تر از ۳۱ یعنی ۳۱،۲۹،۲۳،۱۹،۱۷،۱۳،۱۱،۷،۵،۳،۲ بررسی کنیم که تعداد آن‌ها ۱۱تا است.

دقت شود این‌که اعداد کم‌تر از ۱۰۰ در این محدوده قرار ندارند هیچ تغییری در روند تعداد تقسیم‌ها ایجاد نمی‌کند.

۱۹۴- گزینه۲ در این نوع سؤالات فقط با امتحان گزینه، جواب مسئله به دست می‌آید.

فقط گزینهٔ درست را بررسی می‌کنیم که گزینهٔ ۲ است.

در غربال ۱ تا ۵۰؛ ابتدا عدد ۱ خط می‌خورد.

تعداد اعدادی که با مضارب ۲ خط می‌خورند:

$$\frac{50-4}{2} + 1 = 24$$

تعداد اعدادی که با مضارب ۳ خط می‌خورند:

$$\frac{45-9}{6} + 1 = 7$$

مضارب ۵: (۲تا) ۳۵ و ۲۵

مضارب ۷: (یکی) ۴۹

که جمع آن‌ها:

$$1 + 24 + 7 + 2 + 1 = 35$$

البته در این سؤال واضح بود که اعداد ۶۰ و ۷۰ نمی‌توانند جواب مسئله باشند.چون نصف آن‌ها با عدد ۱ و ۲ خط می‌خورد.

۱۹۵- گزینه۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): نمی‌تواند جواب مسئله باشد، زیرا ۱۰۰ با مضرب ۲ خط می‌خورد و هنوز مضارب ۳، ۵ و ۷ خط نخورده‌اند.

گزینهٔ (۲): نادرست است، زیرا ۱۲۹ با مضرب ۳ خط می‌خورد و هنوز مضارب ۵، ۷ و ۱۱ خط نخورده‌اند.

گزینهٔ (۳): نادرست است، زیرا ۱۸۷ با مضرب ۱۱ خط می‌خورد و هنوز مضارب ۱۳ خط نخورده‌اند.

گزینهٔ (۴): درست است، زیرا ۱۴۳ با مضرب ۱۱ خط می‌خورد و از $169 = 13^2$ کوچک‌تر است و می‌توان این عدد را به عنوان آخرین عدد در نظر گرفت.

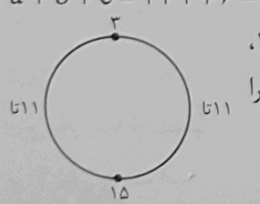
چند سؤال دیگر از اعداد طبیعی

۱۹۶- گزینه۲ با حدس و آزمایش مقادیر a و b را به دست می‌آوریم.

از این‌که $ab = 2$، پس یکی از آن‌ها یک و دیگری ۲ است. اگر $a = 1$ پس $b = 2$ و $c = 6$ بنابراین:

$$a + b + c = 1 + 2 + 6 = 9$$

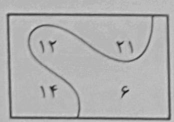
۱۹۷- گزینه۴ با توجه به فرض مسئله، شمارهٔ ۳ روبه‌روی ۱۵ واقع شده است. در یک طرف دایره شماره‌های ۴ تا ۱۴، یعنی ۱۱ نفر ایستاده‌اند. از آن‌جا که فاصله‌ها مساوی است، پس در طرف دیگر نیز باید ۱۱ نفر بایستند (شکل مقابل را در نظر بگیرید).



پس تعداد کل نفرات برابر است با:

$$11 + 11 + 2 = 24$$

۱۹۸- گزینه۱ منظور سؤال این است که در مستطیل داده‌شده مضرب‌های ۲ و ۳ را جدا کرده‌ایم. در مستطیل دیگر با این روش خط‌کشیدن، مضرب‌های چه اعدادی را می‌توان جدا کرد که جواب مسئله مطابق شکل مقابل مضرب‌های ۶ و ۷ است.



۱۹۹- گزینه۲ چون به ازای هر n که این خاصیت را داشته باشد مسئله درست است پس با مثال عددی مسئله را حل می‌کنیم.

عددی که زوج باشد و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۲۳ برابر با ۱۳ شود را می‌توان $n = 13 + 23 = 36$ در نظر گرفت.

پس $\frac{n}{2} = \frac{36}{2} = 18$ که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۳ برابر با ۵ است.

۲۰۰- گزینهٔ ۲ با حدس و آزمایش به دسته‌های مقابل می‌رسیم:

$(۱,۲,۳)$ $(۲,۳,۴)$ $(۳,۴,۵)$
$(۱,۲,۶)$ $(۲,۳,۷)$
$(۱,۳,۵)$ $(۲,۴,۷)$
$(۱,۳,۸)$
$(۱,۴,۷)$
$(۱,۵,۶)$

که تعداد آن‌ها ۱۰تا است.

۲۰۱- گزینهٔ ۳ با توجه به ساختار دنبالهٔ ارائه‌شده در سؤال یعنی:

$۱,۱,۲,۴,۷,۱۳,۲۴,...$

مشخص است که دو عدد اول دنباله فرد، دو عدد بعدی زوج، دو عدد بعدی فرد و ...

پس در هر دستهٔ ۴تایی (که این دسته‌بندی از اولین عدد دنباله انجام می‌شود)، ۲ عضو اول دسته، فرد و ۲ عضو بعدی زوج هستند.

با این توضیحات در دسته‌ای که عددهای ۳۳اُم، ۳۴اُم، ۳۵اُم و ۳۶اُم قرار می‌گیرند، عددهای ۳۳اُم و ۳۴اُم فرد و عددهای ۳۵اُم و ۳۶اُم زوج هستند.

۲۰۲- گزینهٔ ۳ با توجه به این‌که n بزرگ‌ترین عددی است که ۴n عدد سه‌رقمی است پس:

$$۴n < ۱۰۰۰ \Rightarrow n = ۲۴۹$$

و از آن‌جا که m کوچک‌ترین عددی است که ۴m عددی سه‌رقمی است پس:

$$۴m > ۹۹ \Rightarrow m = ۲۵$$

بنابراین:

$$۴n - ۴m = ۴(n-m) = ۴(۲۴۹ - ۲۵) = ۸۹۶$$

۲۰۳- گزینهٔ ۴

با حداکثر ۹ عدد می‌توان این کار را انجام داد که ترتیب قرارگرفتن به شکل مقابل است:

$۴,۸,۲,۱۰,۵,۱,۶,۳,۹$

با ۱۰ عدد نمی‌توان این کار را با شرایط ذکرشده انجام داد.

۲۰۴- گزینهٔ ۲ دقت داشته باشید که اگر عدد $۱۰۰۱ = ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$ در هر عدد سه‌رقمی ضرب شود، این عدد سه‌رقمی مجدداً کنار خود تکرار می‌شود، یعنی:

$$\overline{abc} \times ۱۰۰۱ = \overline{abcabc}$$

مجموع ارقام عدد سه‌رقمی که مدنظر سؤال است برابر با ۲۶ است، یعنی از ۲ رقم ۹ و یک ۸ تشکیل شده است.

پس بعد از ضرب در ۱۰۰۱، ارقام عدد حاصل به این شکل است که در آن ۴ رقم ۹ و ۲ رقم ۸ استفاده شده است.

۲۰۵- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر کدام از اعداد بر ۷ برابر با ۶ است ترتیب آن‌ها به این شکل است که این اعداد از عدد ۶ شروع شده و ۷تا، ۷تا اضافه می‌شود. یعنی این اعداد عبارت‌اند از:

$۶,۱۳,۲۰,۲۷,۳۴,۴۱,۴۸,۵۵,...$

از آن‌جا که این چهار عدد نباید عامل مشترکی داشته باشند پس:

$$۶,۱۳,۴۱,۵۵ \Rightarrow \text{حاصل جمع} = ۶+۱۳+۴۱+۵۵ = ۱۱۵$$

اما اگر ۶ را در نظر نگیریم، داریم:

$$۱۳,۲۰,۲۷,۴۱ \Rightarrow \text{حاصل جمع} = ۱۳+۲۰+۲۷+۴۱ = ۱۰۱$$

از آن‌جا که کم‌ترین حاصل‌جمع مدنظر است پس جواب مسئله ۱۰۱ است.

۲۰۶- گزینهٔ ۳ با توجه به روند تقسیم‌کردن کاغذها، در هر مرحله ۹ کاغذ به تعداد کاغذها اضافه می‌شود.

(زیرا کاغذی را که به ۱۰ قسمت تقسیم کرده یکی را برداشته و ۹تا باقی می‌ماند.)

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم تعداد کاغذها در هر مرحله بر عدد ۹ مقداری ثابت است که در این‌جا با توجه به این‌که با ۱۰ کاغذ شروع کرده‌ایم باقی‌مانده بر ۹ برابر با یک است.

در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳) این خاصیت را ندارد.

۲۰۷- گزینهٔ ۱ با توجه به ساختار ارائه‌شدهٔ مقابل:

$$\begin{array}{r} KAN \\ +KAG \\ KNG \\ \hline ۲۰۰۶ \end{array}$$

مطمئناً $K = ۶$، زیرا اگر $K = ۵$ باشد جمع حاصل کم‌تر از ۱۸۰۰ می‌شود و اگر $K = ۷$ باشد جمع حاصل بیشتر از ۲۱۰۰ می‌شود.

با حدس و آزمایش، بقیهٔ حروف عبارت‌اند از:

$$K = ۶ \quad , \quad N = ۴ \quad , \quad G = ۱ \quad , \quad A = ۸$$

۲۰۸- گزینه۲ با توجه به این‌که:

(جمع ارقام a برابر با b و جمع ارقام b برابر با c است.)

$x = a + b + c$

$c + c + c = ۳c =$ جمع ارقام x

یعنی x بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲۰۹- گزینه۱ این اعداد عبارت‌اند از ۳۴۱ ,... ,۷۱ ,۶۱ ,۵۱ که فاصلهٔ بین هر دو عدد متوالی برابر با ۱۰ است، پس:

$A = ۵۱ + ۶۱ + ۷۱ + \cdots + ۳۴۱$ $\quad$ تعداد $= \frac{۳۴۱ - ۵۱}{۱۰} + ۱ = ۳۰$ $\quad$ مجموع $= \frac{(۳۴۱ + ۵۱) \times ۳۰}{۲} = ۵۸۸۰$

۲۱۰- گزینه۴ با توجه به یک‌رقمی، ۲رقمی و ۳رقمی ... بودن شمارهٔ هر صفحه، تعداد صفحات را تعیین می‌کنیم.

اگر از صفحهٔ شمارهٔ ۱ تا ۹۹، ارقام را بشماریم این تعداد برابر می‌شود با: $۹ + (۹۰ \times ۲) = ۱۸۹$

پس: $۶۵۱ - ۱۸۹ = ۴۶۲$ رقم دیگر احتیاج داریم.

از طرفی هر عدد سه‌رقمی، از سه رقم تشکیل شده یعنی تا ۱۵۴اُمین عدد سه‌رقمی $(۱۵۴ = \frac{۴۶۲}{۳})$ باید بشماریم که ۱۵۴اُمین عدد سه‌رقمی عدد ۱۵۳ است.

پس تعداد صفحات برابر است با: $۱۰۰ + ۱۵۳ = ۲۵۳$

۲۱۱- گزینه۲ با توجه به این‌که حاصل‌ضرب ارقام ۲ است، پس رقم‌های استفاده‌شده باید یک و ۲ باشد، از طرفی حاصل‌جمع ارقام برابر با ۲۰۱۰ است، یعنی در بهترین حالت ممکن (تعداد ارقام بیشترین مقدار ممکن شود) می‌توان از یک رقم ۲ و ۲۰۰۸تا رقم یک استفاده کرد، که در این حالت عدد موردنظر ۲۰۰۹رقمی می‌شود.

یک عدد ۲۰۰۹رقمی، ۲۰۰۹ جایگاه متفاوت برای قرارگرفتن عدد ۲ دارد، پس تعداد اعدادی که با این ساختار می‌توان نوشت برابر با ۲۰۰۹ است.

۲۱۲- گزینه۵ با توجه به این‌که حاصل‌ضرب رقم‌های این عدد فرد است، پس این عدد هیچ رقم زوجی ندارد یعنی هر ۶ رقم فرد است. پس گزینه‌های (۱) و (۴) رد می‌شوند.

از طرفی کل ارقام فرد، ۵تا است (۹,۷,۵,۳,۱) پس گزینهٔ (۳) نیز رد می‌شود.

یک مثال برای این حالت، عدد ۱۱۱۱۱۱ است، پس گزینهٔ (۲) رد می‌شود.

بنابراین گزینهٔ درست، گزینهٔ (۵) است.

۲۱۳- گزینه۵ از آن‌جا که کوچک‌ترین عدد طبیعی مدنظر است، پس باید تعداد ارقام را کم‌تر، در نتیجه هر رقم را باید بزرگ‌ترین مقدار ممکن در نظر بگیریم. به عبارت دیگر بیشترین تعداد رقم ۹ که می‌توان استفاده کرد را باید به دست آوریم.

$$\begin{array}{r|l} ۲۰۰۶ & ۹ \\ \hline \vdots & ۲۲۲ \\ \hline ۸ & \end{array}$$

پس می‌توان از ۲۲۲تا رقم ۹ و یک رقم ۸ استفاده کرد، یعنی عدد به صورت زیر است:

$$۸\underbrace{۹۹ \ldots ۹}_{\text{۲۲۲ تا}}$$

که اولین رقم سمت چپ آن ۸ است.

۲۱۴- گزینه۳ با توجه به این‌که x از رقم‌های ۱، ۲ و ۳ تشکیل شده است و دهگان آن ۲ است، پس x به یکی از دو صورت زیر است:

$x = ۱۲۳$ یا ۳۲۱

یعنی یکان x فرد است.

از طرفی $x + y$ زوج است، پس y نیز فرد است، یعنی یکان y برابر با ۵ است.

اما رقم یکان حاصل‌ضرب دو عدد برابر با حاصل‌ضربِ رقم یکان‌هاست و با توجه به این‌که یکی از رقم‌های یکان، عدد ۵ است، بنابراین حاصل‌ضرب رقم یکان‌ها نیز برابر با ۵ می‌شود.

۲۱۵- گزینه۵ با توجه به این‌که عدد داده‌شده ۱۰۰۰رقمی است، پس از ۲۵۰تا ۲۰۰۸ یا به عبارت دیگر ۲۵۰تا ۸، ۲۵۰تا ۲ و ۵۰۰ تا صفر تشکیل شده است. ابتدا همهٔ صفرها را حذف می‌کنیم. حال باید سعی شود از رقم‌های ۲ تعداد بیشتری حذف شود زیرا اگر بخواهیم ۲۰۰۸ را با ۲ بسازیم تعداد رقم بیشتری نیاز است، پس:

۲۵۰تا ۸ را نگه می‌داریم $(۲۰۰۰ = ۸ \times ۲۵۰)$، ۴تا ۲ هم نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم.

در واقع: $۵۰۰ + ۲۴۶ = ۷۴۶$ رقم را حذف کرده‌ایم.

۲۱۶- گزینهٔ۲ ابتدا باید تعیین کنیم برای این‌که این عبارت ۱۰۰ رقم داشته باشد تا چه عددی باید بنویسیم.

۹تا :تعداد اعداد یک‌رقمی

۹۹ = ۲ × ۴۵ :تعداد اعداد دورقمی تا ۵۴

پس اگر تا عدد ۵۴ بنویسیم، ۹۹تا رقم ظاهر شده است. رقم ۱۰۰اُم هم ۵ است.

پس به جای حل مسئلهٔ اصلی، این مسئله را حل کرد که از ۱ تا ۵۴ از چند رقم یک استفاده شده است که این تعداد برابر است با:

یکی: تعداد رقم یک در اعداد یک‌رقمی

۱۱ تا: از ۱۱ تا ۱۹

۴ تا: از ۲۱ تا ۵۱

پس در مجموع از ۱۶ رقم یک استفاده شده است.

۲۱۷- گزینهٔ۴ برای این‌که بیشترین حاصل‌ضرب را به دست آوریم اعداد دو دسته را باید طوری در نظر بگیریم که جمع اعداد دو دسته یا با هم مساوی باشند یا کم‌ترین اختلاف را داشته باشند.

می‌دانیم جمع ۶ عدد برابر است با:

$۱۱+۳۱+۱۹+۳+۱۰+۶=۸۰$

با در نظر گرفتن دسته‌های مقابل:

$۳۱+۶+۳=۴۰$ و $۱۱+۱۹+۱۰=۴۰$

بیشترین مقدار حاصل‌ضرب به دست می‌آید که این بیشترین مقدار برابر است با:

$۴۰\times۴۰=۱۶۰۰$

۲۱۸- گزینهٔ۱ با توجه به این‌که اعداد خوب این ویژگی را دارند که اگر اعضای آن را به ۲ دسته تقسیم کنیم، جمع اعضای ۲ دسته برابر می‌شود، پس مجموع کل اعداد باید زوج باشند.

در گزینه‌های (۳) و (۴) جمع اعداد فرد است، زیرا:

گزینهٔ (۳): $۱+۲+۳+\cdots+۲۱=\frac{۲۲\times۲۱}{۲}=۱۱\times۲۱$ فرد است

گزینهٔ (۴): $۱^۲+۲^۲+\cdots+۱۰^۲$

۵ تا از اعداد فرد و۵تا زوج است، پس جمع آن‌ها فرد است.

پس این دو گزینه رد می‌شوند.

از طرفی در گزینهٔ (۲)، عدد $۲^{۱۰}$ از مجموع ۹تای دیگر بیشتر است. پس این مجموعه هم نمی‌تواند اعداد طبیعی خوب باشد.

پس فقط گزینهٔ (۱) درست است.

این دو دسته می‌تواند به شکل زیر باشد:

دستهٔ اول: ۱,۲۰,۲,۱۹,۳,۱۸,۴,۱۷,۵,۱۶

دستهٔ دوم: ۶,۱۵,۷,۱۴,۸,۱۳,۹,۱۲,۱۰,۱۱

۲۱۹- گزینهٔ۴ با حدس و آزمایش و کمک از دستورالعمل ارائه‌شده داریم:

$۰+(۴\times۷)-(۵\times۵)=۳$ ، $۰+(۳\times۷)-(۵\times۴)=۱$ ، $۰+۷-۵=۲$

۲۲۰- گزینهٔ۱ با توجه به این‌که می‌توان ۲ برابر عدد را روی تخته نوشت، پس به هر عدد زوج مثبت می‌توان رسید.

اما اگر دو واحد از عدد یک کم کنیم عدد ۱- حاصل می‌شود و با ۲ برابر کردن می‌توان به هر عدد زوج منفی رسید ولی هیچ‌گاه نمی‌توان به یک عدد فرد مثبت رسید، پس گزینهٔ (۱) جواب مسئله است.

۲۲۱- گزینهٔ۳ با توجه به این‌که در هر مرحله ۲ عدد را پاک می‌کند و به جای آن عدد دیگری را می‌نویسد، پس بعد از ۹ مرحله فقط یک عدد روی تخته باقی می‌ماند. (تعداد اعداد در حالت اولیه ۱۰ تاست.)

از طرفی در هر مرحله یک واحد از مجموع دو عدد دلخواه کم می‌شود. پس در کل مراحل از مجموع کل اعداد ۹ واحد کم می‌شود. یعنی عدد آخر برابر است با:

$(۱+۲+۳+\cdots+۹+۱۰)-۹=۵۵-۹=۴۶$

۲۲۲- گزینهٔ۱ مراحل انجام کار طبق دستورالعمل داده‌شده، به شکل زیر است:

مرحلهٔ اول: $۳\times۲^۹-۳\times۲^۸=۳\times۲^۸(۲-۱)=۳\times۲^۸$

مرحلهٔ دوم: $۳\times۲^۸-۳\times۲^۷=۳\times۲^۷$

⋮

مرحلهٔ نهم: $۳\times۲^۱-۳=۳$

مرحلهٔ دهم: $۳-۱=۲$

مرحلهٔ یازدهم: $۲-۱=۱$